

令和4年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125 点)

令和3年8月25日(水) 13:00 – 14:00

(注 意 事 項)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子のページ及び解答紙は次のとおりである。「始め」の合図があったら、それぞれを確認すること。

	問 題 冊 子	解 答 紙	
科 目	ペ ー ジ	解答紙番号	枚数
物理学 [I]	1 ～ 7	[I-A], [I-B]	2

3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も用いて良い。
5. 計算その他を試みる場合は、問題冊子の余白を利用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

物理学 [I]

[I-A] バットでボールを打つときに、手に対する衝撃が最も小さくなる衝突点をバットの芯という。この位置を求めるために、バットをモデル化した、十分に細く質量 M で密度一様な、剛体とみなせる棒と、十分に小さいボールの、水平面内での衝突を考える。

図1のように xy 平面を水平面とし、それと垂直な方向を z 軸とする。 x 軸に平行に置かれた静止した棒に、水平面内を $+y$ 方向に飛んできたボールが、棒の重心 G から $+x$ 方向に距離 a の位置に衝突する。衝突の際、棒には $+y$ 方向に撃力がはたらき、ボールから大きさ N の力積を受けるものとする。重心 G を通り、棒に対して垂直な軸のまわりの棒の慣性モーメントを I とし、摩擦や空気抵抗、および重力の影響は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。[I-A] の問いについては、答えのみを解答紙に記入すればよい。また、棒の慣性モーメント I を解答に用いてよい。

問 1. ボールが当たった直後の、棒の運動量 $\mathbf{p}$ を求めよ。

問 2. ボールが当たった直後の、重心 G のまわりの棒の角運動量 $\mathbf{L}$ を求めよ。

問 3. 重心 G からみて、ボールが当たった位置とは反対側の距離 d の位置を点 P とする。ボールが当たった直後の、点 P の速度 $\mathbf{v}$ を求めよ。

問 4. 実際に点 P を握ってボールを打つときには、 $|\mathbf{v}| = 0$ であれば手に対する衝撃は最も小さくなる。この時の d と a の関係（バットを握る位置と芯の位置の関係）を求めよ。

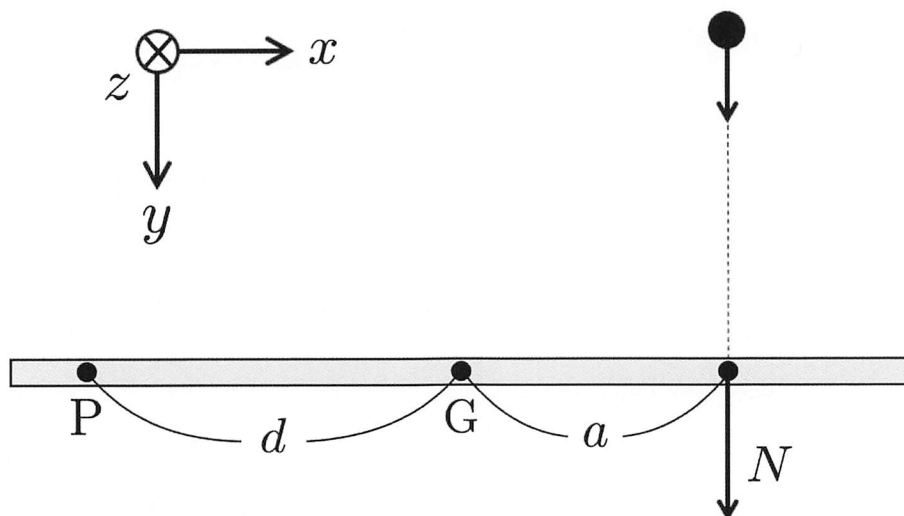


図 1

— 計算用余白ページ —

[I-B]

- [a] 図2に示すような, xy 平面に拘束された, 質量 m の N 個の質点が, ばね定数 κ の $N+1$ 個のばねでつながれた系を考える。各質点は y 方向にのみ動くことができ, 原点 O から i 番目の質点の y 座標を u_i とする。 x 方向には等しい間隔 a で並んでいるため, i 番目の質点の x 座標は ia である。また, 系の両端は $(0, 0)$, $((N+1)a, 0)$ に固定されており, それらの y 座標を便宜的に u_0, u_{N+1} と書く。このとき, 系の運動エネルギー K と弾性エネルギー V は, それぞれ,

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2, \quad V = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} \kappa \{ a^2 + (u_{i+1} - u_i)^2 \}$$

と書ける。ただし, ばねの質量と自然長は 0 とする。空気抵抗および重力の影響は無視できるとして, 以下の問いに答えよ。

問 1. u_1 に関するオイラー・ラグランジュ方程式を具体的に求めよ。

問 2. u_i ($1 \leq i \leq N$) に関するオイラー・ラグランジュ方程式を具体的に求めよ。

問 2 で求めた方程式は, 適当な N 行 N 列の対称行列 $\mathbf{A}$ を用いることで,

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = -\mathbf{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

のように書ける。この $\mathbf{A}$ は, ある直交行列 $\mathbf{P}$ を用いて以下のように対角化できる。

$${}^t\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } \lambda_i > 0 \quad (1 \leq i \leq N).$$

ここで左上の添え字 t は転置を表し, ${}^t\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}{}^t\mathbf{P} = \mathbf{I}$ (単位行列) である。

問 3. $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \equiv {}^t\mathbf{P} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ で定義される基準座標 $v_1, v_2, \dots, v_N$ が, それぞれ単振動の運

動方程式 $m \frac{d^2 v_i}{dt^2} = -\lambda_i v_i$ ($1 \leq i \leq N$) に従うことを示せ。

問 4. $N = 3$ の場合について, 基準座標の振動の角振動数を, m, κ, a のうち必要なものを用いて全て求めよ。

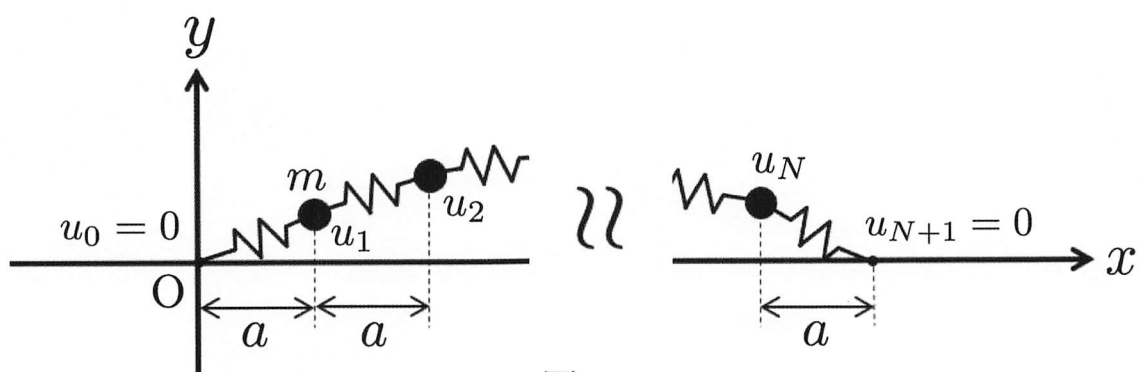


图 2

[b] 前問 [a] の系において、全質量 $M = Nm$ 、末端の間の距離 $l = (N+1)a$ 、および、 κa を一定に保ちつつ、 $N \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow 0, a \rightarrow 0, \kappa \rightarrow \infty$) とする連続極限をとると、図 3 に示すような、大きさ $F = \kappa a$ の張力がはたらき、密度が一様で太さの無視できる弦が得られる。このとき、滑らかな連続関数 $u(x, t)$ を用いて、弦の形状は $y = u(x, t)$ と表すことができる。また、弦の運動エネルギー K' と弾性エネルギー V' は、それぞれ、

$$K' = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M}{l} \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\}^2 dx, \quad V' = \frac{1}{2} Fl + \int_0^l \frac{1}{2} F \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right\}^2 dx$$

と書ける。以下の問いに答えよ。必要であれば、任意の自然数 p, q について

$$\frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{l}x\right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{p\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{l}x\right) dx = \delta_{pq}$$

であることを用いてよい。ただし、 δ_{pq} はクロネッカーのデルタである。

問 5. $u(x, t)$ は、波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - M^\alpha l^\beta F^\gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

に従う。べき乗を表している指数 α, β, γ をそれぞれ答えよ。

問 6. $u(x, t)$ のフーリエ級数展開は

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_j(t) \sin(k_j x), \quad \text{ただし } k_j = \frac{j\pi}{l}$$

のように、異なる波数 k_j を持つ成分の重ね合わせとして書ける。ここで、 $\tilde{u}_j$ はフーリエ係数である。このとき、系のラグランジアン L は、

$$L = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{M}{l} \left\{ \frac{d\tilde{u}_j(t)}{dt} \right\}^2 - \left[\frac{1}{2} Fl + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} F k_j^2 \{\tilde{u}_j(t)\}^2 \right]$$

と書けることを示せ。

問 7. $\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots$ は、それぞれ対応する波数における弦の運動を記述する一般化座標とみなすことができる。ある自然数 n について、 $\tilde{u}_n(t)$ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を具体的に求めよ。ただし、 m, N, κ, a は用いずに答えよ。

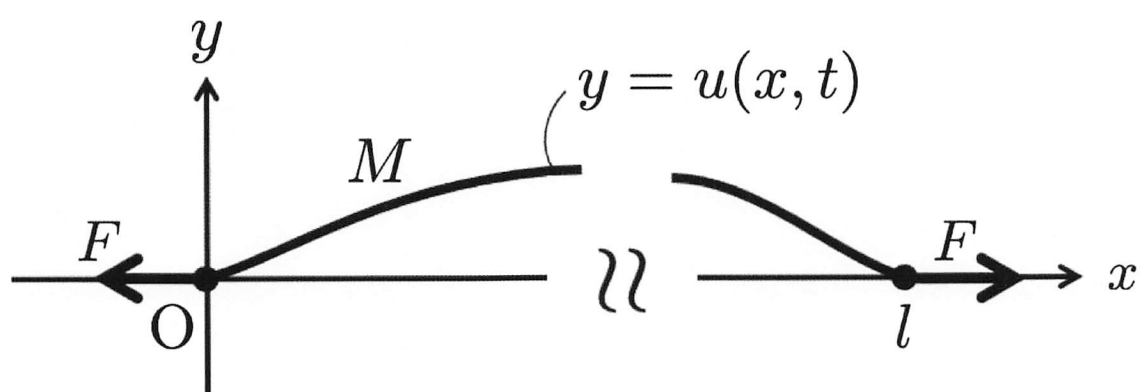


图 3

令和4年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II] (125 点)

令和3年8月25日(水) 14:20 – 15:20

(注 意 事 項)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子のページ及び解答紙は次のとおりである。「始め」の合図があったら、それぞれを確認すること。

	問 題 冊 子	解 答 紙	
科 目	ペ ー ジ	解答紙番号	枚数
物理学 [II]	1 ～ 5	[II-A], [II-B]	2

3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も用いて良い。
5. 計算その他を試みる場合は、問題冊子の余白を利用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II]

物理学 [II]

[II-A] 真空中に位置と時間 t に依存する電荷密度 ρ ，電流密度 $\mathbf{j}$ があるとき，電場 $\mathbf{E}$ ，電束密度 $\mathbf{D}$ ，磁場 $\mathbf{H}$ ，磁束密度 $\mathbf{B}$ が満たすマクスウェル方程式について考える。真空の誘電率を ϵ_0 ，透磁率を μ_0 として，以下の問いに答えよ。

問 1. 微分形のマクスウェル方程式を書け。

問 2. 任意のベクトル場 $\mathbf{a}$ とスカラー場 f に対して，次式が成り立つことを示せ。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$$

問 3. マクスウェル方程式を用いて，電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{j}$ が次の方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

また，この方程式の物理的意味を書け。

問 4. 電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は，スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて，次式のように表すことができる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

このように表した電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ が，ファラデーの電磁誘導の法則と磁束密度に関するガウスの法則を満たすことを示せ。

問 5. スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ に対して，任意のスカラー関数 Λ を用いて次のゲージ変換を考える。

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$$

このゲージ変換のもとで，電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ が不変であることを示せ。

— 計算用余白ページ —

[II-B] 真空中にある平行平板コンデンサーを考える。図 1 に示すように、円筒座標系 (r, θ, z) をとる。 e_r, e_θ, e_z はそれぞれ r, θ, z 方向の直交単位ベクトルとする。コンデンサーの極板は半径 R 、厚さ d の金属円盤で、平面 $z = 0$ に平行である。上側の極板の下面は $z = z_0/2$ に、下側の極板の上面は $z = -z_0/2$ にある。このコンデンサーの上側の極板と下側の極板に、内部抵抗が無視できる電源を接続する。二つの極板の半径は、厚さと極板間距離に比べて十分大きい ($R \gg d, z_0$) ため、極板間の電場は一様で e_z 方向の成分のみをもち、端の効果は無視できるとする。また、真空の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 とする。

以下で必要な場合は、次の表式を用いてもよい。ここで、 $\mathbf{a}$ はベクトル場である。また、 a_r, a_θ, a_z はそれぞれ、 $\mathbf{a}$ の e_r, e_θ, e_z 方向の成分である。

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z = (a_r, a_\theta, a_z)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

まず、直流電源をコンデンサーに接続する場合を考える。最初、各極板に電荷は蓄積されていない。直流電源を接続して十分時間が経った後、コンデンサーは充電され、上側の極板には電荷 $+Q_0$ が蓄積された。ただし、 $Q_0 > 0$ とする。

問 1. 上側の極板の上面 ($z = z_0/2 + d$) と下面 ($z = z_0/2$)、下側の極板の上面 ($z = -z_0/2$) と下面 ($z = -z_0/2 - d$) のそれぞれに蓄積される電荷を答えよ。答えのみでよい。

問 2. 極板間の電場を $\mathbf{E}_0 = E_{0,z} \mathbf{e}_z$ とする。ガウスの法則を用いて $E_{0,z}$ を求めよ。

次に、交流電源をコンデンサーに接続する場合を考える。最初、各極板に電荷は蓄積されていない。時刻 $t = 0$ で交流電源を接続する。上側の極板に時刻 $t (> 0)$ に蓄積されている電荷 Q は、 $Q = Q_0 \sin \omega t$ であった。ここで、 ω は角周波数である。以下では、ゆっくりと時間変化する、極板間の電場と磁場を考える。ただし、磁場は e_θ 方向の成分のみをもち、また、電磁誘導による誘導電場は無視できるとする。

問 3. 極板間の電場を $\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z$ とする。 E_z を求めよ。

問 4. 問 3 の結果を用いて、変位電流密度 j_D を求めよ。

問 5. 平面 $z = 0$ 内にある、原点 O を中心とする半径 r の円周上の磁場を $\mathbf{H} = H_\theta \mathbf{e}_\theta$ とする。アンペール・マクスウェルの法則を用いて H_θ を求めよ。ただし、 $r < R$ とする。

問 6. 問 3 と問 5 の結果を用いて、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ を求めよ。

問 7. 問 3 と問 5 の結果を用いて、電磁場のエネルギー密度 $u = (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2)/2$ を求めよ。

問 8. 電磁場のエネルギー密度 u とポインティングベクトル $\mathbf{S}$ において、ここでは、 ωt は十分小さいとして、 $\sin \omega t \simeq \omega t$ 、 $\cos \omega t \simeq 1$ と近似する。この近似のもとで、 u と $\mathbf{S}$ の表式をそれぞれ求めよ。また、求めた表式の u と $\mathbf{S}$ の間に次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

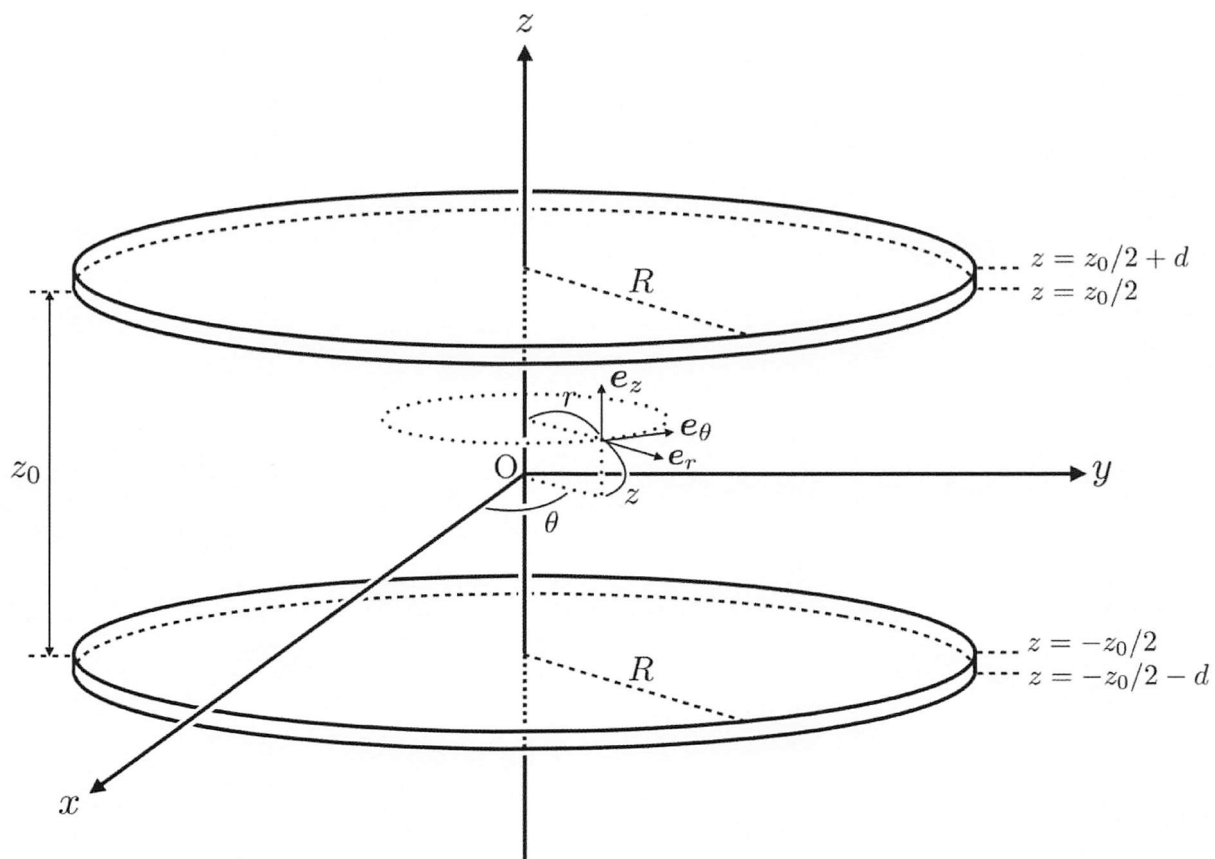


图 1

令和4年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [III] (125 点)

令和3年8月25日(水) 15:40 – 16:40

(注 意 事 項)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子のページ及び解答紙は次のとおりである。「始め」の合図があったら、それぞれを確認すること。

	問 題 冊 子	解 答 紙	
科 目	ペ ー ジ	解答紙番号	枚数
物理学 [III]	1 ～ 5	[III-A], [III-B]	2

3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も用いて良い。
5. 計算その他を試みる場合は、問題冊子の余白を利用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

物理学 [III]

[III-A]

座標演算子を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ と表記する。運動量演算子 $\mathbf{p}$ や軌道角運動量演算子 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ についても同様の表記をする。交換関係 $[x_a, p_b] = i\hbar \delta_{ab}$ ($a, b = 1, 2, 3$) を用いて以下の問いに答えよ。ただし、 h をプランク定数として換算プランク定数を $\hbar = h/(2\pi)$ と定義する。 $\delta_{ab}, \varepsilon_{abc}$ ($a, b, c = 1, 2, 3$) は以下で定義されるテンソルである。

$$\delta_{ab} = \begin{cases} +1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}, \quad \varepsilon_{abc} = \begin{cases} +1 & (a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (a, b, c) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問 1. 交換関係 $[x_a, p_b] = i\hbar \delta_{ab}$ を用いて、 $[L_1, L_2] = i\hbar L_3$ を示せ。

その他の交換関係も合わせて軌道角運動量演算子は $[L_a, L_b] = i\hbar \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} L_c$ を満たす。

問 2. $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ とするとき、 L_3 と L^2 が同時固有状態を持つことを示せ。

L^2 の固有値を $\lambda\hbar^2$ 、 L_3 の固有値を $m\hbar$ とし、これらの同時固有状態を $|\lambda, m\rangle$ とすると

$$L^2|\lambda, m\rangle = \lambda\hbar^2|\lambda, m\rangle, \quad L_3|\lambda, m\rangle = m\hbar|\lambda, m\rangle.$$

が成り立つ。また、 $L_{\pm} = L_1 \pm iL_2$ (以下も含めて全て複号同順とする) と定義すると、 $[L_3, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$ 、 $[L^2, L_{\pm}] = 0$ が満たされる。

問 3. $L_{\pm}|\lambda, m\rangle \propto |\lambda, m \pm 1\rangle$ となることを示せ。

— 計算用余白ページ —

[III-B]

中性子を極低温に冷やし運動エネルギーを下げると波動性があらわになってくる。そこで、重力ポテンシャル中で、ある空間に閉じ込めた中性子の量子状態について、非相対論的に考察しよう。

問 1. 2×10^{-7} eV の運動エネルギーを持つ中性子のド・ブローイ波長の大きさを求めよ。ただし、中性子の質量エネルギーを $mc^2 = 1 \times 10^9$ eV, プランク定数を $h = 4 \times 10^{-15}$ eV·s, 真空中の光速を $c = 3 \times 10^8$ m/s とせよ。

以下の問いでは、中性子の質量 m , 換算プランク定数 $\hbar = h/(2\pi)$, 重力加速度の大きさ g 等の記号を用いて答えよ。

図 1 のように各辺の長さが a の正方形を底面にもつ直方体の井戸の内部 ($|x| \leq a/2, |y| \leq a/2, z \geq 0$) に、中性子を閉じ込める。井戸の内部では z 軸の負の方向に一様に重力がはたらいており、井戸の高さは十分に高く、無限大とみなせるものとする。このとき、中性子は図 1 であらわされる次のポテンシャル $V(x, y, z)$ 中を運動する。

$$V(x, y, z) = \begin{cases} +mgz & (|x| \leq a/2, |y| \leq a/2, z \geq 0) \\ +\infty & (\text{その他の領域}) \end{cases}.$$

問 2. 定常状態の波動関数 $\psi(x, y, z)$ に関するシュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z),$$

と書ける。ここで、系のエネルギーは E とした。このシュレディンガー方程式は波動関数を $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ と変数分離して解くことができる。 x 方向の波動関数 $X(x)$ と z 方向の波動関数 $Z(z)$ の従うシュレディンガー方程式を書け。ただし、 $X(x)$ に対応する固有エネルギーを E_x , $Z(z)$ に対応する固有エネルギーを E_z とせよ。

問 3. 適切な境界条件を設定して x 方向のシュレディンガー方程式を解き、正の整数 n を用いて対応するすべての固有エネルギー $E_x(n)$ を答えよ。解答は固有エネルギーのみでよく、波動関数は答える必要はない。

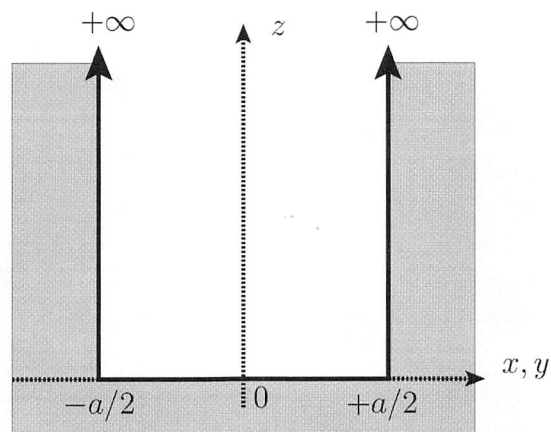


図 1

次に、変分法を用いて z 方向のシュレディンガー方程式を近似的に解くことを考えよう。ただし、必要であれば以下の公式を用いてよい。

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-kz} dz = \frac{n!}{k^{n+1}} \quad (n \text{ は自然数}, k \text{ は正の実定数}).$$

問 4. 変分法で基底状態を近似する規格化された試行関数として $\phi_0(z) = (b^3/2)^{1/2} z \exp(-bz/2)$ を考える。固有エネルギーの期待値 $\langle E_{z,0} \rangle$ を変分変数 b の関数として導出せよ。そして、以下の あ と い にあてはまる数を答えよ。

$$\langle E_{z,0} \rangle = \text{あ} \frac{\hbar^2 b^2}{2m} + \text{い} \frac{mg}{b}.$$

問 5. 試行関数は、 b の微小変化に対して、対応する z 方向の波動関数の固有エネルギーの期待値が極小値をとるときに最適な近似となる。このときの b の値と、 b を消去したエネルギー期待値を導出せよ。そして、以下の う と え にあてはまる数を答えよ。

$$b = \left(\frac{\text{う} m^2 g}{\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad \langle E_{z,0} \rangle = \text{え} \left(\frac{9 \hbar^2 m g^2}{4} \right)^{1/3}.$$

z 方向の波動関数 $Z(z)$ が従うシュレディンガー方程式は厳密に解くこともできる。変数変換 $w = \left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left(z - \frac{E_z}{mg} \right)$ を行えば、シュレディンガー方程式は $\frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} = w \varphi(w)$ の形の微分方程式に帰着できる。

問 6. この微分方程式を満たす関数として、図 2 に示す一次独立な関数 $A(w)$ と $B(w)$ が知られている。これらの関数の漸近的振る舞いは $\lim_{w \rightarrow +\infty} A(w) = 0$, $\lim_{w \rightarrow +\infty} B(w) = +\infty$ である。 $A(w)$ と $B(w)$ のうち一方はシュレディンガー方程式の解の候補として適切ではない。適切でない関数を答え、その理由を述べよ。

問 7. $A(w) = 0$, $B(w) = 0$ を満たす w のうち絶対値が小さい方から数えて n 番目の値をそれぞれ α_n , β_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 $Z(z)$ に対応する基底状態の固有エネルギー E_z を α_n もしくは β_n を用いて答えよ。

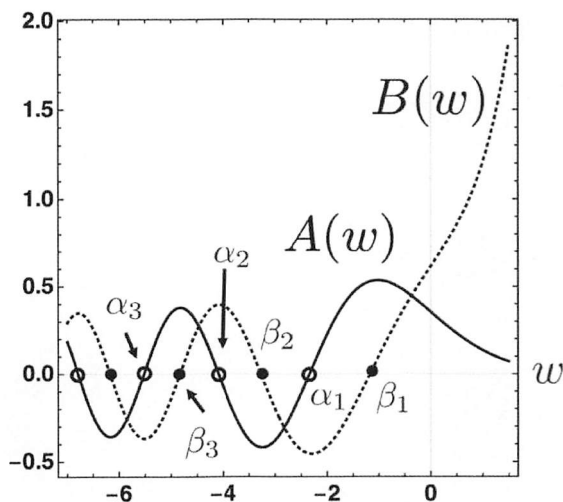


図 2

令和4年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125 点)

令和3年8月26日(木) 9:30 – 10:30

(注 意 事 項)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子のページ及び解答紙は次のとおりである。「始め」の合図があったら、それぞれを確認すること。

	問 題 冊 子	解 答 紙	
科 目	ペ ー ジ	解答紙番号	枚数
物理学 [IV]	1 ～ 5	[a], [b]	2

3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も用いて良い。
5. 計算その他を試みる場合は、問題冊子の余白を利用すること。
6. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

物理学 [IV]

図1の丸印で示された各点は、水素分子気体の回転運動に関する熱容量 C_r の測定結果である。以下の問いに答えよ。ただし、物理定数や変数は次のように表記する。

k_B : ボルツマン定数, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$: プランク定数 h を 2π で割った換算プランク定数,
 N : 水素分子の個数, T : 温度, m : 水素原子の質量, $2m$: 水素分子の質量,
 I : 水素分子の慣性モーメント (分子の中心を通り分子軸と垂直な軸のまわり)

- [a] 室温付近 ($T \simeq 300\text{K}$) において、測定結果は2原子分子理想気体の回転に関する熱容量とよく一致する。以下の手順に沿って、2原子分子理想気体の熱容量を導出しよう。

ある一定の体積 V の領域を自由に運動する N 個の等核2原子分子が温度 T の熱平衡状態にある。図2に示すように、 i 番目の分子の重心位置 $\mathbf{r}_i$, 分子軸の向き θ_i, ϕ_i を定義し、それらの共役運動量をそれぞれ $\mathbf{p}_i, p_{\theta_i}, p_{\phi_i}$ とする。系のハミルトニアンは

$$H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\theta_i\}, \{\phi_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, \{p_{\theta_i}\}, \{p_{\phi_i}\}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{4m} + \frac{p_{\theta_i}^2}{2I} + \frac{p_{\phi_i}^2}{2I \sin^2 \theta_i} \right) \quad (1)$$

と表される。 N は十分大きいとする。この系の分配関数 $Z(T, V, N)$ は、次のような並進運動の分配関数 $Z_t(T, V, N)$ と回転運動の分配関数 $Z_r(T, V, N)$ の積に分離できる。

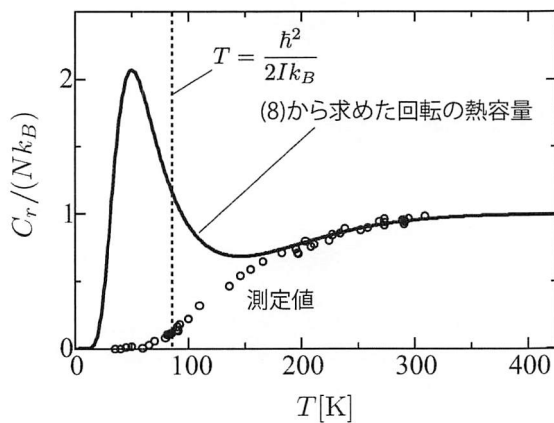


図1：水素分子の回転運動の熱容量
 (出典：A. Eucken (1912), K. Scheel & W. House (1913), M. Trautz & K. Hebbel (1924), F. A. Giacomini (1925) 等)

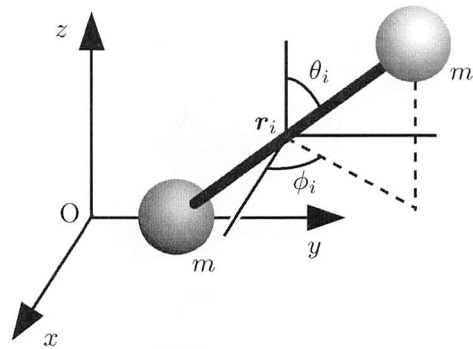


図2：等核2原子分子のモデル

$$Z(T, V, N) = Z_t(T, V, N) Z_r(T, V, N) \quad (2)$$

$$Z_t(T, V, N) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \cdots \int \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{4m} \right] \left(\prod_{i=1}^N d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i \right) \quad (2a)$$

$$Z_r(T, V, N) = \frac{1}{h^{2N}} \int \cdots \int \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_{\theta_i}^2}{2I} + \frac{p_{\phi_i}^2}{2I \sin^2 \theta_i} \right) \right] \left(\prod_{i=1}^N d\theta_i d\phi_i dp_{\theta_i} dp_{\phi_i} \right) \quad (2b)$$

問 1. $Z_t(T, V, N)$ および $Z_r(T, V, N)$ について, (2a), (2b) の積分を計算し,

$$Z_t(T, V, N) = \frac{V^N}{N! h^{3N}} (4\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} \quad (3a)$$

$$Z_r(T, V, N) = \left(\frac{I k_B T}{\hbar^2} \right)^N \quad (3b)$$

となることを示せ。ただし, 分子は等核であるため, 原子を入れ換えた状態と元の状態は区別できないことに留意せよ。つぎのガウス積分の公式を証明なしに使ってよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0) \quad (4)$$

問 2. ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V, N)$ のうち, 分子の並進運動が寄与する部分 $F_t(T, V, N)$ および回転運動が寄与する部分 $F_r(T, V, N)$ を求め, これらの示量性が確認できるように, 空欄 (A), (B) に入る部分を答えよ。答えのみを解答すればよい。

$$F_t(T, V, N) = N k_B T \left(\boxed{\hspace{2cm}} \text{ (A)} \right)$$

$$F_r(T, V, N) = N k_B T \left(\boxed{\hspace{2cm}} \text{ (B)} \right)$$

問 3. 定積熱容量 C_V についての関係式

$$C_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_{V, N} \quad (5)$$

を用いて, 全系の並進運動の熱容量 C_t および回転運動の熱容量 C_r を求めよ。

問 4. 熱容量 C は, 系に加えられた微小な熱 ΔQ とそのときの微小な温度変化 ΔT の比例係数として

$$\Delta Q = C \Delta T \quad (6)$$

で定義される。(6) を用いて, 関係式 (5) を導け。

[b] 室温より低い温度において、測定結果は顕著な温度依存性を示す。量子統計に基づいて、 C_r の温度変化を計算しよう。

2 原子分子の回転運動のエネルギー固有値 $\frac{\hbar^2}{2I}l(l+1)$ を用いると、分子 1 個あたりの回転運動に関する分配関数は

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \frac{2l+1}{2} \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \right] \quad (7)$$

の形に表される。ここで、 $l = 0, 1, 2, \dots$ であり、 σ_l は状態 l のスピンの縮退度を表す。

水素分子の場合、どちらの原子核もスピン $1/2$ をもち、フェルミ粒子として振る舞う。そのため、原子核の入れ替えに対して、波動関数は (C) となる。波動関数の対称性は、波動関数のスピンに関する部分の対称性と空間に関する部分の対称性の組み合わせで決まる。これにより、スピンの波動関数が反対称な場合（パラ水素）は偶数の l に限られ、スピンの波動関数が対称な場合（オルソ水素）は奇数の l に限られる。さらに、オルソ水素のスピンの縮退度が 3 重縮退していることを考慮して、水素分子 1 個あたりの回転運動に関する分配関数は

$$z_r(T) = z_r^{\text{para}}(T) + z_r^{\text{ortho}}(T) \quad (8)$$

$$z_r^{\text{para}}(T) = \sum_{l=0,2,4,\dots} \frac{2l+1}{2} \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2Ik_B T} l(l+1) \right] \quad (8a)$$

$$z_r^{\text{ortho}}(T) = 3 \sum_{l=1,3,5,\dots} \frac{2l+1}{2} \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2Ik_B T} l(l+1) \right] \quad (8b)$$

のように、パラ水素とオルソ水素の回転の分配関数 $z_r^{\text{para}}(T)$, $z_r^{\text{ortho}}(T)$ の和で表される。図 1 の実線で示すように、(8) から計算される C_r は 50K 付近に鋭いピークをもつ。

問 5. 文中の (C) に入る語句として、「対称」と「反対称」のどちらが適しているかを答えよ。

問 6. オルソ水素が占める割合

$$W^{\text{ortho}}(T) = \frac{z_r^{\text{ortho}}(T)}{z_r(T)} \quad (9)$$

について、高温極限 $\frac{\hbar^2}{2Ik_B T} \rightarrow 0$ での値を答えよ。答えのみを解答すればよい。

問 7. (8) から計算される C_r は, 0 K 近傍で温度上昇とともに急激に増加する。この特徴を考察するため, 十分に低温 ($T \ll \frac{\hbar^2}{2Ik_B}$) の水素分子を, パラ水素が $l = 0$ の基底状態のみ, オルソ水素が $l = 1$ の状態のみをとる 2 準位系として近似して, 以下を計算せよ。

(i) オルソ水素が占める割合 $W^{\text{ortho}}(T)$

(ii) 全系の回転運動に関する熱容量 $C_r(T)$

問 8. 図 1 をみると, (8) から求めた C_r は測定結果から大きくずれる。その原因は, オルソ水素からパラ水素への状態遷移が非常にゆっくりと起こるためである。試料中のオルソ水素の割合は, 問 7 (i) の結果とは異なり, 温度変化しないと考えられる。試料が室温の気体水素を急冷したものとして, 測定値を再現する C_r の表式を C_r^{para} と C_r^{ortho} を用いて推定せよ。ただし, C_r^{para} , C_r^{ortho} は, パラ水素とオルソ水素との間の遷移が起これないとして, それぞれ (8a), (8b) から計算されるパラ水素およびオルソ水素の回転の熱容量である。