令和5年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125 点) 令和4年8月29日 (月) 13:00 -14:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁(空白の頁を除く)、解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も使って良い。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

[**I-A**] 図１のように, 質量 M, 半径 a の一様な剛体球が, 水平な床の上に静止している. x 軸と z 軸の正の向きをそれぞれ水平右向きと鉛直上向きにとる. 球の中心は x-z 平面内にあり, 同じ平面内の床から高さ h の点で, x 軸の正の向きに水平に球を棒で突いて, 撃力を加える. 球が受けた力積の大きさを P , 球と床の間の動摩擦係数を μ として, その後の重心運動および, 重心まわりの回転運動について, 以下の問いに答えよ.

ただし, 球が滑らずに転がるときの摩擦力（転がり摩擦）は無視できるものとし, 球の回転角を θ, 重力加速度の大きさを g とする. また, 球の中心は x-z 平面内に常にあり, 球の重心の速度の y 成分はゼロとする.

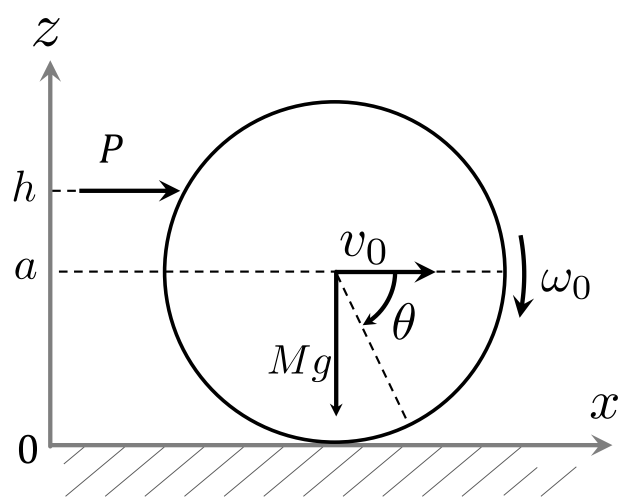

図１

問１. 球の中心軸周りの慣性モーメントが $I = (2/5)Ma^2$ となることを示せ. 必要であれば, 以下の積分公式を用いてよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \alpha d\alpha = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 & (n = 2k+1) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n = 2k) \end{cases}$$

ただし, k は自然数.

力積を受けた直後の, 球の重心の速度の x 成分を v_0, 回転の角速度を ω_0 として, 以下の問いに答えよ.

問 2. 撃力によって力積を受ける前後の, 球の運動量変化 Δp と中心まわりの角運動量の変化 ΔL を, P, h, a を用いて表せ.

問 3. v_0 と ω_0 を M, P, h, a を用いて表せ.

問 4. ある高さ h_0 で球に撃力を加えたところ, 球は滑らずに床を転がった. この時の高さ $h = h_0$ を求めよ.

問 5. $h_0 < h < 2a$ で撃力を与えた直後の, 球に働く摩擦力の大きさと向きを答えよ.

問 6. $h_0 < h < 2a$ で撃力を与えた直後の, 球の重心移動および回転に関する運動方程式を求めよ.

問 7. 問 3 で得られた重心の速度の x 成分 v_0 と回転の角速度 ω_0 を初期条件として, 問 6 で求めた球の運動方程式を用いて, 球が滑らなくなるまでの時間 t_1 と, 滑らなくなった後の球の重心の速度の x 成分 v_1 を求めよ. また, 重心の速度の x 成分 $v(t)$ の時間発展のグラフの概形を描け. 解答では, 図 2 のように t_1 と v_1 を記入すること.

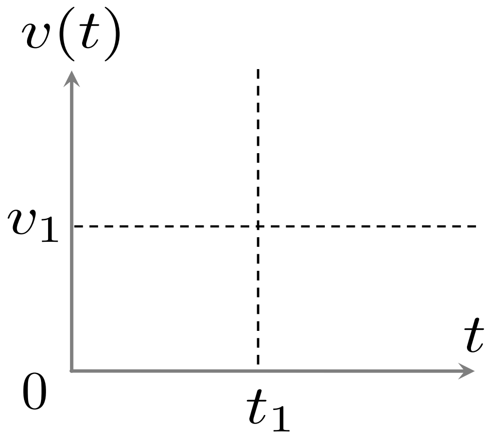

図 2

[**I-B**] 図3に示すように一様な重力場で, 質量 m の質点Pが回転放物面 $z = r^2/(2a)$ に沿って滑らかに運動する $(a > 0)$. z 軸の正の向きを鉛直上向きにとり, z 軸からの距離を r, z 軸周りに x 軸から測った回転角を θ とし, これらを変数とする円筒座標系を用いるものとする. また, 重力加速度の大きさを g とする.

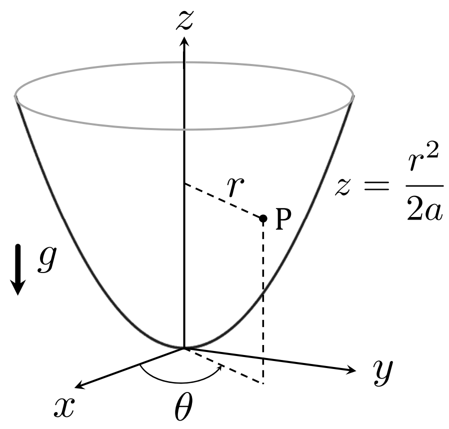

図3

問1. 3次元デカルト座標系における質点Pの x 座標と y 座標を r, θ を用いて表せ.

問2. この質点Pが回転放物面上を運動しているとき, 質点の運動エネルギー T と, 重力による位置エネルギー U を, r, θ およびそれらの時間微分の関数として表せ. ただし, $z = 0$ を位置エネルギーの基準とせよ.

問3. この質点Pが回転放物面上を運動しているとき, 質点Pのラグランジアンを, r, θ およびそれらの時間微分の関数として表せ.

問4. 前問のラグランジアンとオイラー・ラグランジュ方程式から次の関係を導出せよ.

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

また, $mr^2\dot{\theta}$ の物理的な意味と, それが保存する理由も述べよ.

問 5. 前問と同様に, オイラー・ラグランジュ方程式から, r が満たす運動方程式が次のようになることを示せ.

$$\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\ddot{r}=\frac{S^2}{r^3}-\frac{r\dot{r}^2}{a^2}-\frac{g}{a}r$$

ただし, $S=r^2\dot{\theta}$ を定数とする.

問 6. 時刻 $t=0$ において, $(r,\theta,z)=(r_0,0,r_0^2/(2a))$ の位置から面に沿って水平方向へ質点を打ち出すとき, 質点 P が常に同一水平面内にあるための初速度の大きさ v_0 を求めよ. また, 質点 P が水平面内を一周して元の位置に戻るまでの時間を求めよ.

問 7. 前問の r_0 からわずかにずれた位置から, 面に沿って水平方向へ質点 P を打ち出すと, r_0 から r 方向に微小振動をしながら運動した. 問 5 で与えられた r に関する運動方程式を, $r=r_0+\delta r$ として δr の一次の項まで展開し, δr に関する運動方程式を求めよ. ただし, $S=r^2\dot{\theta}=r_0v_0$ とする. また, 得られた運動方程式から r 方向の微小振動の周期を求めよ. ただし, $|\delta r|/r_0\ll 1$ とする. 解答には, a, g, r_0 を用いること.

令和5年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II]（125 点） 令和4年8月29日（月） 14:40 –16:00

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁（空白の頁を除く）、解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も使って良い。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II]

電場，電束密度を $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{D}$，磁場，磁束密度を $\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{B}$，電荷密度を ρ，電流密度を $\boldsymbol{J}$ とする．このときマクスウェル方程式は以下の通りである．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \tag{1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{1d}$$

ここで $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ とし，定数 ϵ, μ は真空での誘電率と透磁率とする．以下の問いに答えなさい．

[II-A]

問 1. 磁束密度とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の関係は $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ である．時間変化しない電磁場で，クーロンゲージ $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ をとる時,

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{2}$$

となることを示しなさい．なお，ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V}$ を使ってよい．

問 2. ベクトルポテンシャルとして，z 方向の成分のみを持ち，x, y のみの関数 $\boldsymbol{A} = (0,\ 0,\ f(x, y))$ とする．また電流密度も同様に $\boldsymbol{J} = (0,\ 0,\ J(x, y))$ と表されるとする．

(a) f に対する偏微分方程式を書き下しなさい．

(b) 磁束密度が次のように表されることを示しなさい．

$$\boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}, 0 \right) \tag{3}$$

問 3. 電流のない領域で，f は 2 次元のラプラス方程式を満たすので，複素関数を使うと便利である．$\zeta \equiv x + iy$ を変数とする複素関数 $f(\zeta)$ の実部を u, 虚部を v とする．これらがコーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

を満たす時，u が 2 次元のラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

を満たすことを示しなさい.

問 4. 複素関数 $f(\zeta) = \ln \zeta$ が，$\zeta \neq 0$ でコーシー・リーマンの方程式を満たすことを示しなさい.

問 5. a を正の実数とし，また $w = \exp(\pi i/4)$ とする．これを使って，

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \ln(\zeta - aw) - \ln(\zeta - aw^3) + \ln(\zeta - aw^5) - \ln(\zeta - aw^7) \\ &= \ln\left(\frac{(\zeta - aw)(\zeta - aw^5)}{(\zeta - aw^3)(\zeta - aw^7)}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

とする.

(a) $w^4 = -1$ に注意して，原点付近でのテイラー展開

$$f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots \tag{7}$$

を行い，係数 c_0, c_1, c_2 を求めなさい.

(b) (6) 式の $f(\zeta)$ の実部 $u(x, y)$ を使い，ベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A} = (0,\ 0,\ u(x, y))$ とする．問 5-(a) の結果を用いて，原点付近の磁束密度を求めなさい.
また求めた磁束密度のベクトル場に対応するものを，図 1 の [a]-[d] の中から記号で答えなさい.

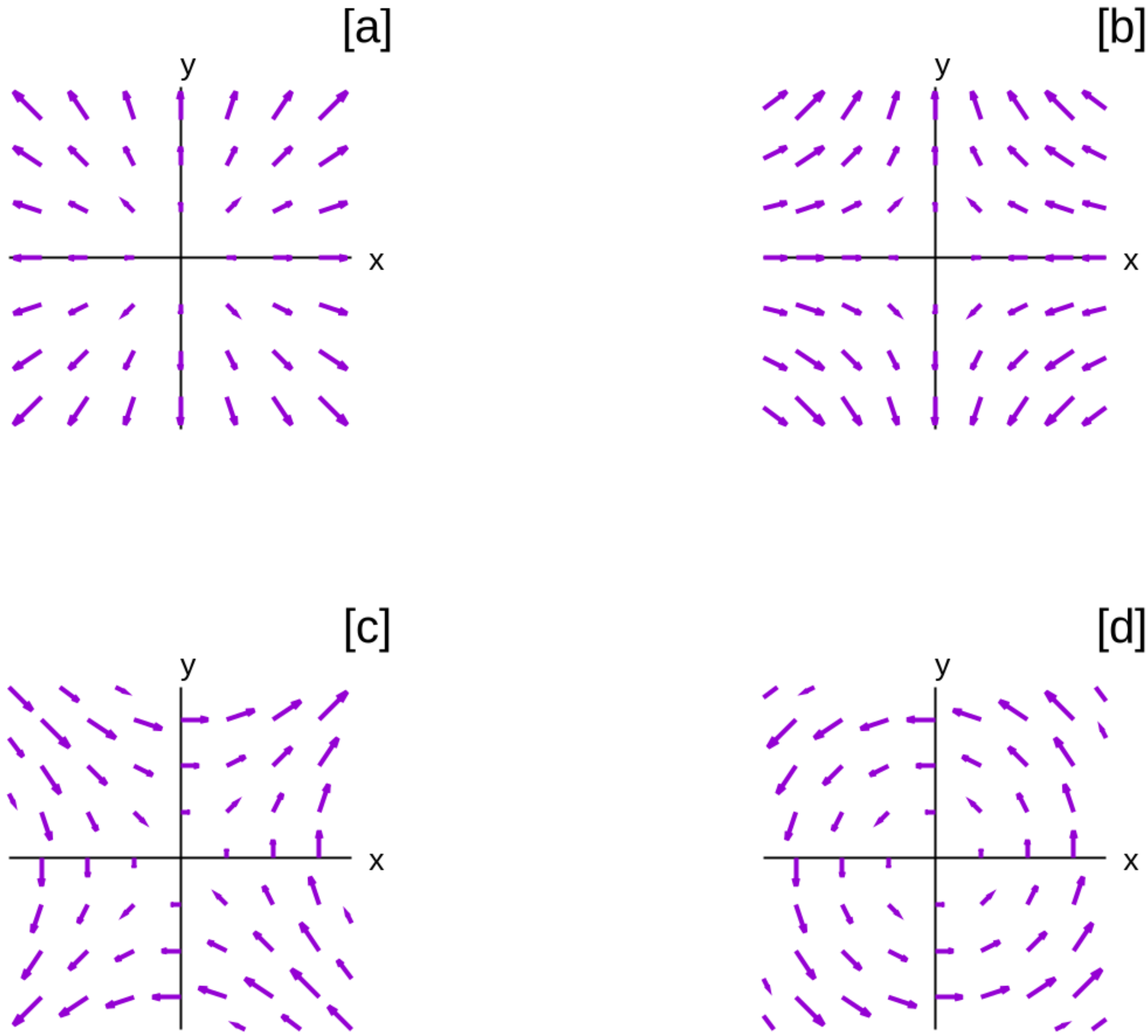

図 1: ベクトル場

[II-B]

z 軸方向に進む電磁波を次のように表す.

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(x,y)\exp(-i\omega t + ik_z z) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0(x,y)\exp(-i\omega t + ik_z z) \tag{9}$$

ここで ω は角振動数，k_z は z 方向の波数である. また境界を除いて電荷も電流もない真空を考える.

問 1. マクスウェル方程式に (8), (9) 式を代入し，$\boldsymbol{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ と $\boldsymbol{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, H_{0z})$ に関する真空での方程式 8 つを書き下しなさい.

問 2. 前問の結果から，以下の形の式が導かれる.

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} = (k_z^2 - \epsilon\mu\omega^2)E_{0z} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{0z}}{\partial y^2} = (k_z^2 - \epsilon\mu\omega^2)H_{0z} \tag{11}$$

このうち，(10) 式の導出過程を示しなさい.

2 辺 a, b の長方形断面 $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$ の導波管について，TM 波 $(E_{0z} \neq 0, H_{0z} = 0)$ を考える. 以下の問いに答えなさい.

問 3. 偏微分方程式 (10) に，$E_{0z}(0,y) = E_{0z}(a,y) = 0$ および $E_{0z}(x,0) = E_{0z}(x,b) = 0$ という境界条件を課す. このとき三角関数の性質に注意して，固有値

$$\epsilon\mu\omega^2 - k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{12}$$

$(m = 1, 2, 3, \cdots;\ n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対応する固有関数を求めなさい.

問 4. (a) 問 3 で与えられた固有値を用い，群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} \tag{13}$$

を求めなさい. ただし解答には $\omega, k_z, \epsilon, \mu$ を用いること.

(b) 位相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} \tag{14}$$

と光速度 c の大小を調べなさい. ただし $c^2 = 1/(\epsilon\mu)$ である.

(c) 群速度 v_g と光速度 c の大小を調べなさい.

令和5年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [III] (125 点) 令和4年8月29日 (月) 16:20 −17:40

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁(空白の頁を除く)、解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も使って良い。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

量子力学において, 物理量と状態はそれぞれエルミート (自己共役) 演算子と複素ベクトルに対応づけられる. 以下では, ディラックのブラケット記法に基づいてケット (ベクトル) を $|\alpha\rangle$, 対応するブラ (ベクトル) を $\langle\alpha| = (|\alpha\rangle)^\dagger$ と表す. また $\hat{X}$ が演算子のとき, そのエルミート共役を $\hat{X}^\dagger$ と表す. エルミート演算子とは, $\hat{X}^\dagger = \hat{X}$ を満たす演算子である.

> 解答には以下を用いて良い.
>
> - ケット $|\alpha\rangle$ とブラ $\langle\beta|$ の内積 $(\langle\beta|)\cdot(|\alpha\rangle) = \langle\beta|\alpha\rangle$ は一般に複素数であり, $(\langle\beta|\alpha\rangle)^* = \langle\alpha|\beta\rangle$ を満たす.
> - エルミート演算子の固有値は実数である.
> - 演算子 $\hat{X}$ と $\hat{Y}$ について $(\hat{X}\hat{Y})^\dagger = \hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger$ である.

以下では, $\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものとする. また, $|\alpha\rangle \neq 0$ を満たす任意のケット $|\alpha\rangle$ は $\langle\alpha|\alpha\rangle > 0$ を満たすものとし, 任意の演算子 $\hat{X}$ をケット $|\alpha\rangle$ に作用させた $\hat{X}|\alpha\rangle$ もまたケットをなすとする. 記号 $\hat{I}$ は恒等演算子を表し, $\hat{I}|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ を満たす. また, $[\hat{X}, \hat{Y}] = \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X}$ という記法を用いる.

[**III-A**]　量子力学の基本的な性質に関する以下の**問 1.**–**問 4.** に答えよ.

問 1. $\hat{U}$ をユニタリー演算子とする. 状態ベクトル $|\psi\rangle$ を用いて $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ と定義する. このとき, ユニタリー演算子の性質を用いて, $\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$ が成り立つことを示せ.

問 2. $\hat{A}$ をエルミート演算子とし, その固有値は離散的で縮退を持たないとする. $\hat{A}$ の固有ケットを固有値でラベルし, $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ のように表す. エルミート演算子の固有ケットの全体は完全系をなす. すなわち, $\sum_a |a\rangle\langle a| = \hat{I}$ が成り立つ. このことを用いて, 状態ベクトル $|\psi\rangle$ による $\hat{A}$ の期待値 $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ が実数であることを示せ.

問 3. 状態ベクトル $|\psi\rangle$ による演算子 $\hat{X}$ の期待値を $\langle\hat{X}\rangle = \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle$ と表し, これを用いて $\Delta\hat{X} = \hat{X} - \langle\hat{X}\rangle$ と定義する. 期待値 $\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle$ を $\hat{X}$ の分散と呼ぶ. 任意のエルミート演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して, 不確定性関係

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right|^2 \tag{III-1}$$

が成り立つことを, 以下の (1)–(4) に従って導け.

(1) $\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}$ および $(\Delta\hat{A}\Delta\hat{B})^\dagger$ を求めよ．解答には $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\langle\hat{A}\rangle$, $\langle\hat{B}\rangle$ を用いること．

(2) $\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}$ は, エルミート演算子 $\hat{C}$ と $\hat{D}$ によって $\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} = \hat{C} + i\hat{D}$ の形に表すことができる．ここで i は虚数単位である．$\hat{C}$ と $\hat{D}$ を求めよ．解答には $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\langle\hat{A}\rangle$, $\langle\hat{B}\rangle$ を用いること．

(3) 任意のエルミート演算子 $\hat{E}$ と $\hat{F}$ に対して, $|\langle\hat{E} + i\hat{F}\rangle|^2 \geq |\langle\hat{F}\rangle|^2$ が成り立つことを示せ．

(4) 任意の $|\alpha\rangle$ および $|\beta\rangle$ について, シュワルツの不等式 $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ が成り立つ．この $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle$ と $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle$ を対応させ, さらに上の (2), (3) の結果を用いて, 不等式 (III-1) を導け．

以下では, 1 次元の位置座標演算子を $\hat{x}$, その固有値 x' を与える固有ケットを $|x'\rangle$ のように表す．この固有ケットは $\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x)$ を満たすものとする．ここで $\delta(x' - x)$ はディラックのデルタ関数である．また, 一次元の運動量演算子を $\hat{p}$ とする．このとき, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{I}$ が成り立つ．

問 4. 一粒子状態を表す $|\psi\rangle$ が以下を満たすものとする:

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}d^{1/2}} e^{ixp_\psi/\hbar} e^{-x^2/(2d^2)}. \tag{III-2}$$

ここで, p_ψ と d は正の実定数である．$\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ を位置座標表示の波動関数と呼ぶ．以下の (1)–(4) に答えよ．

(1) ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いて, 式 (III-2) の波動関数が規格化条件を満たすことを示せ．

(2) dx を x の微小量とするとき, $|\langle x'|\psi\rangle|^2 dx$ という量はある確率を表している．どのような確率を表すか説明せよ．

(3) 完全性の関係式 $\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x| = \hat{I}$ が成り立つこと, および公式 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ を用いて, $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ を求めよ．

(4) 式 (III-2) を満たす状態 $|\psi\rangle$ については, $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \frac{1}{4}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle|^2$ が成り立っている．このことを用いて, $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ を求めよ．

[**III-B**]　ハミルトニアン $\hat{H}(t)$ が, 時間に依存しない無摂動ハミルトニアン $\hat{H}^{(0)}$ とあらわな時間依存性を持つ摂動項 $\lambda\hat{H}'(t)$ によって

$$\hat{H}(t) = \hat{H}^{(0)} + \lambda\hat{H}'(t)$$

と与えられる系を考える. 以下では, 実定数 λ のべき展開による議論が成立するものと仮定する. また, 無摂動ハミルトニアン $\hat{H}^{(0)}$ の固有状態を $|E_n\rangle$ $(n = 1, 2, \dots)$, その固有値を E_n とする. すなわち, $\hat{H}^{(0)}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$ が成り立つ. 固有値 E_n には縮退がなく, 状態は $\langle E_m|E_n\rangle = \delta_{mn}$ と規格化されているものとする. ここで δ_{mn} はクロネッカーのデルタで, $n = m$ のとき 1 をとり, $n \neq m$ のとき 0 である. 以下の**問 1.**–**問 6.** に答えよ.

問 1. $\hat{H}(t)$ によって時間発展する系の状態ベクトルを $|\Psi(t)\rangle$ とする. このとき, $|\Psi(t)\rangle$ に対するシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle,$$

で与えられる. $\lambda = 0$ のとき, 状態ベクトル $|\psi_n(t)\rangle = e^{-iE_nt/\hbar}|E_n\rangle$ がシュレディンガー方程式の解となっていることを確かめよ.

以下では, $\lambda \neq 0$ の場合のシュレディンガー方程式の解について考える. 状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle$ を $|\psi_n(t)\rangle$ で以下のように展開する:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)|\psi_n(t)\rangle.$$

ここで $C_n(t)$ は時刻 t の関数である. 以下では $\dot{C}_n(t) = \frac{d}{dt}C_n(t)$ とする.

問 2. 以下の関係が成り立つことを導け.

$$i\hbar\sum_n \dot{C}_n(t)e^{-iE_nt/\hbar}|E_n\rangle = \lambda\sum_n C_n(t)e^{-iE_nt/\hbar}\hat{H}'(t)|E_n\rangle.$$

問 3. $C_m(t)$ は以下の形の微分方程式を満たす:

$$\dot{C}_m(t) = -\frac{i}{\hbar}\lambda\sum_n C_n(t)e^{\boxed{\text{あ}}}\langle E_m|\hat{H}'(t)|E_n\rangle.$$

上の式の $\boxed{\text{あ}}$ にあてはまる量を書け.

問 4. λ のべき展開を用いて, $C_m(t)$ を評価できる. そのために,

$$C_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k c_m^{(k)}(t)$$

という展開を定義する. $C_m(t)$ が満たす微分方程式を用いて, $c_m^{(0)}(t)$ および $c_m^{(1)}(t)$ が満たす微分方程式を導け.

問 5. 外部電場の下で原子が光を吸収または放出し, エネルギー E_ℓ から $E_{\ell'}$ $(\ell' \neq \ell)$ の状態へ遷移する状況について考えよう. 時刻 $t \le 0$ で $|\Psi(t)\rangle = e^{-iE_\ell t/\hbar}|E_\ell\rangle$ および $\hat{H}'(t) = 0$ が成り立つとし, $t > 0$ では摂動ハミルトニアンは

$$\langle E_m|\hat{H}'(t)|E_n\rangle = 2Q_{mn}\cos(\omega t) \qquad (t > 0)$$

を満たすものとする. ここで ω は正の定数, Q_{mn} は m, n に依存する定数である. このとき, $c_m^{(0)}(t) = \delta_{m\ell}$ と取ることができる. 以上より, $t > 0$ における状態ベクトルは λ の一次までで

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iE_\ell t/\hbar}|E_\ell\rangle + \lambda\sum_n c_n^{(1)}(t)e^{-iE_n t/\hbar}|E_n\rangle,$$

と書ける. 初期条件 $c_m^{(1)}(0) = 0$ のもとで $c_m^{(1)}(t)$ を求めよ.

問 6. 前問の結果を用いて, 時刻 $t > 0$ にエネルギーが $E_{\ell'}$ $(\ell' \neq \ell)$ の状態に遷移する確率振幅 $A_{\ell'\ell} = \langle E_{\ell'}|\Psi(t)\rangle$ を求めよ.

令和5年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125 点) 令和4年8月30日 (火) 9:00 -10:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁(空白の頁を除く)、解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号と氏名を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし、指定された解答紙の裏面も使って良い。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

[IV-A]　ある熱力学系の内部エネルギーをU，温度をT，体積をV，圧力をp，エントロピーをSとして以下の問いに答えよ．

問 1. 熱力学系に微小な熱量$d'Q$が与えられ，一部は外に対して準静的に仕事をし，残りは内部エネルギーとして蓄えられたとする．このとき熱力学第1法則は

$$d'Q = \boxed{\text{(A)}}\, dV + dU \tag{1}$$

で与えられる． $\boxed{\text{(A)}}$ に入る量をp, T, V, Sのいずれかを用いて表せ．

問 2. UがTとVで表されるとして，$dU = (\frac{\partial U}{\partial T})_V dT + (\frac{\partial U}{\partial V})_T dV$と表すとき，$d'Q$は

$$d'Q = \boxed{\text{(B)}}\, dT + \boxed{\text{(C)}}\, dV \tag{2}$$

のように書ける． $\boxed{\text{(B)}}$ と $\boxed{\text{(C)}}$ に入る量を$(\frac{\partial U}{\partial T})_V$, $(\frac{\partial U}{\partial V})_T$, および$p, T, V, S$の必要なものを用いて表せ．

問 3. 可逆過程の下では，熱量の変化$d'Q$は温度TとエントロピーSを用いて$d'Q = TdS$となり，(1) 式は

$$dU = -\boxed{\text{(A)}}\, dV + TdS \tag{3}$$

と書ける．ヘルムホルツの自由エネルギーをTとVの関数として$F = U - TS$で定義すると，その全微分は

$$dF = -\boxed{\text{(D)}}\, dV - \boxed{\text{(E)}}\, dT \tag{4}$$

の形に書くことができる． $\boxed{\text{(D)}}$ と $\boxed{\text{(E)}}$ に入る量をp, T, V, Sのいずれかを用いて表せ．

問 4. 前問の結果 (3) 式と (4) 式から

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -\boxed{\text{(A)}} + T\,\boxed{\text{(F)}} \tag{5}$$

の関係式が得られる． $\boxed{\text{(F)}}$ に入る量を$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$, $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$のいずれかを用いて表せ．

問 5. ファンデルワールスの状態方程式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \tag{6}$$

に従う1モルの気体を考える．ただしRは気体定数，a, bは正の定数である．この気体に対して，$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$で定義される定積モル比熱$C_V$は体積$V$によらないことを示せ．

問 6. 状態方程式 (6) に従う 1 モルの気体を図 1(a) に示すようなピストン付きのシリンダーに入れる．ただし，ここでは気体の定積モル比熱 C_V は体積にも温度にもよらない定数であるとする．また，ピストンおよびシリンダーは断熱材でできている．ピストンを準静的に動かして，気体の体積が V_0 から $2V_0$ に変化した．

(1) この過程で値の変わらない状態量を U, T, V, p, S, F の中から選び，その理由を述べよ．

(2) ピストンを動かす前の気体の温度を T_0，ピストンを動かした後の気体の温度を T_1 とする．T_1/T_0 を b, C_V, R, V_0 を用いて表せ．

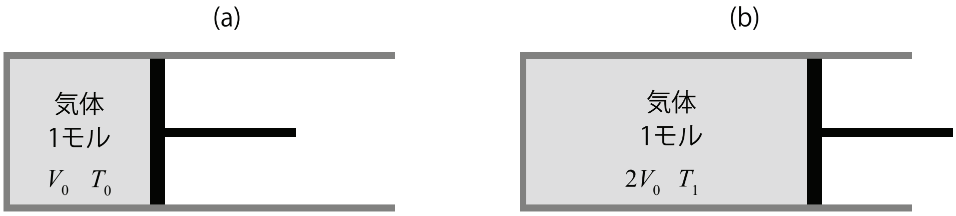

図 1:

[IV-B]　ある物質中において，単位体積あたりの電子の状態密度 $D(\varepsilon)$ が，ε をエネルギー，D_0, E_0 を正の定数として

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} D_0\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)^2} & (-E_0 \le \varepsilon \le E_0) \\ 0 & (\varepsilon < -E_0, \varepsilon > E_0) \end{cases}$$

で与えられている（図 2 参照）．ただし，状態密度とはエネルギーが ε から $\varepsilon + d\varepsilon$ の間の状態の数が $D(\varepsilon)d\varepsilon$ となるように定義された量である．また，フェルミ分布関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_\mathrm{B}T}+1}$$

で与えられる．ここで T は絶対温度，μ は化学ポテンシャル，k_B はボルツマン定数である．以下の問いに答えよ．

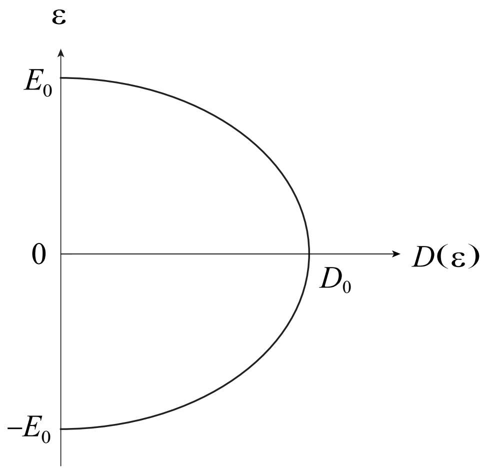

図 2: 状態密度 $D(\varepsilon)$

問 1． 単位体積あたりの状態数 N_0 を D_0 および E_0 を用いて表せ．

以下，問 2 では単位体積あたりの電子の数が $N_0/2$ の場合を考える．状態密度が $\varepsilon = 0$ に関して対称（$D(\varepsilon) = D(-\varepsilon)$）なので化学ポテンシャルは温度によらず $\mu = 0$ となる．十分に低温（$k_\mathrm{B}T \ll E_0$）のとき以下の問いに答えよ．

問 2． (1) 電子系の単位体積あたりの内部エネルギー U を求めよ．ただし，考えている状況では，なめらかな関数 $X(\varepsilon)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon \approx \int_{-\infty}^{\mu} X(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2(k_\mathrm{B}T)^2}{6}\frac{dX(\mu)}{d\mu} \tag{7}$$

が成り立つことを用いてよい．

(2) 前問の結果を用いて電子系の単位体積あたりの比熱 C を求めよ．

次に，問3では，電子の1粒子エネルギーはスピンを表す変数 $\sigma = \pm 1$ に関して2重に縮退しており，各スピン状態ごとにそれぞれ $D(\varepsilon)/2$ の状態密度を持っているとする．さらに，この系に一様な微小磁場 H を新たに印加した状況を考える．電子と磁場との間の相互作用のハミルトニアン $\mathcal{H}_{\rm int}$ は

$$\mathcal{H}_{\rm int} = -\mu_{\rm B} H \sigma$$

で与えられるとする．ただし $\mu_{\rm B}$ は電子のスピン磁気モーメント，$|\mu_{\rm B} H| \ll E_0$ であるとする．化学ポテンシャル μ は引き続き $\mu = 0$ として，以下の問いに答えよ．

問 3. 単位体積あたりの磁化 M を

$$M = \mu_{\rm B} \Big(N_+ - N_- \Big)$$

で定義する．ここで N_+ および N_- はそれぞれ $\sigma = +1$ および -1 をもつ単位体積あたりの電子数の期待値である．

(1) N_+ および N_- を状態密度 $D(\varepsilon + \mu_B H)$, $D(\varepsilon - \mu_B H)$, およびフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ を使って積分の形で表せ．ただし $\mu_B H > 0$ のとき $N_+ > N_-$ であることに注意せよ．

(2) 上で求めた N_+ と N_- を微小磁場 H で展開することで，$T = 0$ における磁化率

$$\chi = \lim_{H \to 0} \frac{M}{H}$$

を求めよ．

(3) 問2. で与えた (7) 式を用いて，低温における磁化率を T について2次までの近似で求めよ．