

令和6年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [I] (125 点) 令和5年8月28日(月) 13:00 – 14:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁 (空白の頁を除く), 解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし, 指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [I]

[I-A]

図1のように、質量が無視できる長さ R の伸び縮みしない糸を、大きさが無視できる穴に通す。糸の両端に、質量がそれぞれ m_A, m_B の二つの質点 A, B を取り付け、水平面上に質点 A を置く。質点 A は平面上を動き、質点 B は穴を通る鉛直線上を運動し、平面より下にあるとする。穴から質点 A までの距離を r とする。また、図1のように、穴の中心 O を通る一つの直線と線分 OA のなす角を ϕ とし、矢印の向きを正とする。質点 A の運動に伴って、 r と ϕ は時間変化する。水平面上の摩擦は無視でき、糸は運動の途中でたわまないものとする。重力加速度の大きさを g とし、以下の問いに答えよ。

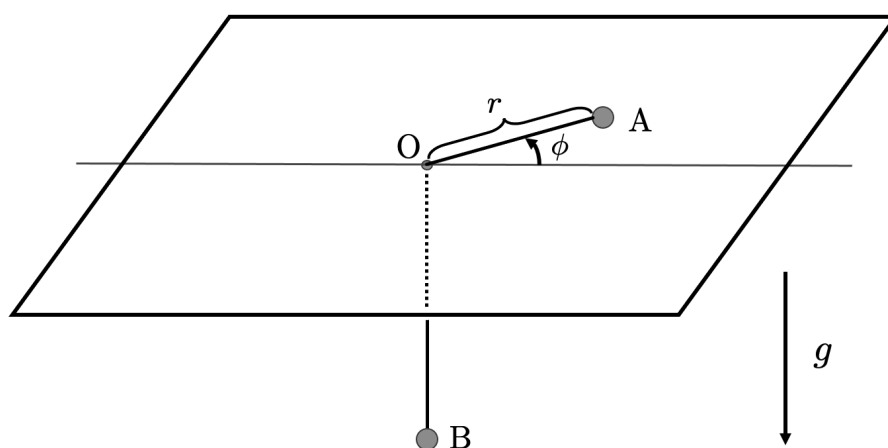


図 1

- 問 1. 距離 r と角度 ϕ を一般化座標として、この系のラグランジアンを書け。ただし、重力の位置エネルギーの基準は平面の高さとする。
- 問 2. 距離 r と角度 ϕ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を、それぞれ求めよ。
- 問 3. 問 2 で求めた方程式を用いて、質点 A の角運動量が保存することを示せ。
- 問 4. 質点 A, B がもつ力学的エネルギーを E とする。保存する角運動量の大きさを ℓ_A とすると、角運動量保存則から $\dot{\phi}$ は ℓ_A, r, m_A を用いて表すことができる。これを用いて力学的エネルギー E から $\dot{\phi}$ を消去した表式を求めよ。また、その表式と問 2 で求めた方程式を用いて、 E が保存することを示せ。

次に、角運動量の寄与を含めた有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ を

$$E = \frac{m_A + m_B}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

と定義し、質点 A, B の運動を考える。以下では角運動量の大きさ ℓ_A は固定する。

- 問 5.** 質点 B が平面下にあることから、 E の取りうる最大値 E_m が存在する。この最大値 E_m を求めよ。また、 $U_{\text{eff}}(r)$ の概形を r の関数として図示し、 E_m も書き入れよ。
- 問 6.** 有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ には極小値が存在する。力学的エネルギー E が極小値 E_c に等しいとき、質点 A はどのような運動を行うかを簡潔に答えよ。また、極小値における r の値 r_c を求めよ。
- 問 7.** 力学的エネルギー E が E_c からわずかに大きいとき、距離 r は r_c のまわりを微小振動する。 $U_{\text{eff}}(r)$ を $r = r_c$ のまわりで $\zeta \equiv r - r_c$ の 2 次まで展開することで、 ζ に関する微小振動の運動方程式を導け。
- 問 8.** 問 7 で得られた運動方程式を解き、距離 r の一般解を求めよ。また微小振動の周期 T_0 を m_A, m_B, ℓ_A, r_c を用いて表せ。

[I-B]

図2のように、幅の狭いU字型の金属を天井に固定し、その間に半径 R_B 、長さ L 、質量 M の円柱状の剛体 B を静止させて引っ掛ける。その上に、長さと質量が剛体 B と同じで、半径 R_A の円柱状の剛体 A を、角速度の大きさ ω_0 で回転させて置く。剛体 A が剛体 B に接触した時刻を $t = 0$ とする。接触後、剛体 A は、剛体 B から動摩擦力を受け、回転が遅くなり、剛体 B は、剛体 A から動摩擦力を受け、回転し始める。図2の太い矢印の方向に回転させるときに右ネジの進む向きを、それぞれ剛体 A, B の回転軸方向の正の向きと定義する。また、剛体 A, B の角速度の回転軸方向成分を、それぞれ ω_A , ω_B と表す。

動摩擦係数は μ' とし、剛体 A, B の滑りの速さによらず一定とする。U字型の金属は滑らかで、回転軸との間の摩擦は無視できるものとする。また、円柱を支える中心軸自体の慣性モーメントも無視できるとする。剛体 A, B の半径は $R_A > R_B$ を満たすものとする。重力加速度は鉛直下向きで、大きさを g とする。以下の問いに答えよ。

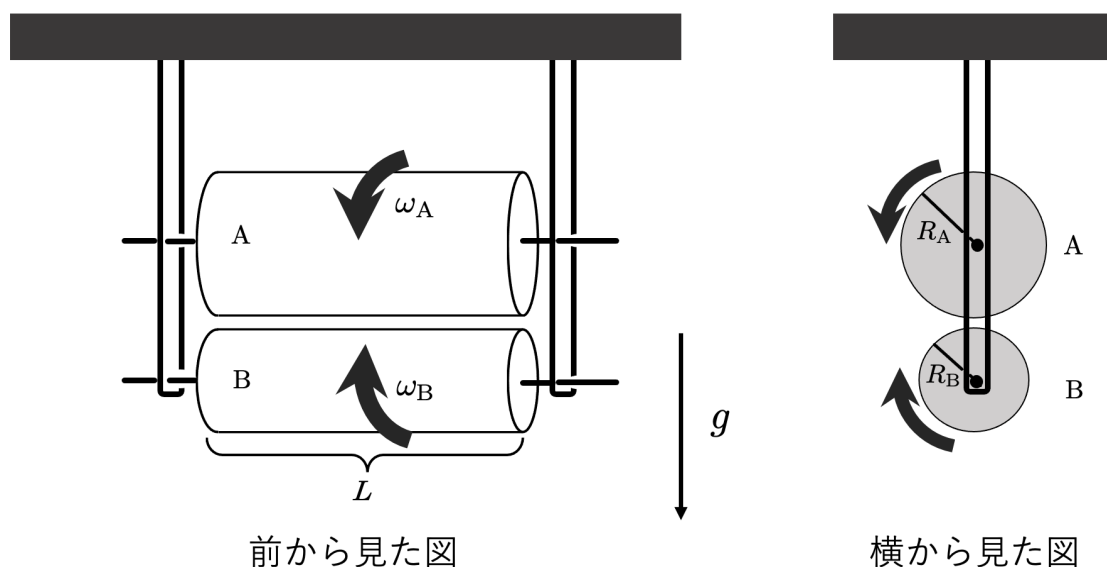


図 2

問 1. 剛体 A と B の中心軸まわりの慣性モーメント I_A , I_B はそれぞれ

$$I_A = \frac{M}{2} R_A^2, \quad I_B = \frac{M}{2} R_B^2$$

と表すことができる。剛体 A の慣性モーメントが、このように表せることを示せ。ただし、剛体の密度は一様であるとする。

以下では I_A, I_B を用いずに, M, R_A, R_B を用いて慣性モーメントを表記せよ。ただし, 途中計算では用いてもよい。

問 2. 二つの剛体を接触させたとき, 剛体 A が受ける動摩擦力の大きさを求めよ。

問 3. 動摩擦力がはたらいている状況で, 剛体 A, B の回転の運動方程式を, それぞれ書け。また, それらの運動方程式を初期条件の下で解き, 各剛体の角速度の大きさ ω_A, ω_B を時間の関数として求めよ。

問 4. ある時刻 t_e で, 動摩擦力ははたらかなくなる。そのときに成り立つ条件式を示し, t_e を求めよ。また, ω_A と ω_B を時間の関数として図に描け。図には, $t = 0$ 及び t_e における ω_A と ω_B の値を記入し, $t > t_e$ も含めて描け。

次に, 剛体 A にブレーキとして, 力のモーメントを加え, 回転を緩やかにする。力のモーメントの回転軸方向成分 N は ω_A に比例し, $N = -\lambda \omega_A$ とする。ただし, λ は正の定数で, $\lambda \omega_A$ は動摩擦力による力のモーメントの大きさよりも大きいとする。ブレーキにより, 剛体 A の回転が急速に遅くなり, すぐに剛体間にすべりが生じるとし, 静止摩擦力の寄与は無視できるものとする。ブレーキをかけ始めた時刻を改めて $t = 0$ とし, $t = 0$ での剛体 A, B の角速度の大きさを, それぞれ ω_A^e, ω_B^e とする。

問 5. ブレーキをかけ始めてからしばらくすると, 動摩擦力がはたらかなくなる。時刻 $t = 0$ から, 動摩擦力がはたらかなくなるまでの間の, 剛体 A, B の回転の運動方程式を, それぞれ書け。それらの運動方程式を解き, ω_A と ω_B を時間の関数として求めよ。

問 6. 動摩擦力がはたらかなくなる時刻 t_F を求めよ。ただし, $\frac{I_A}{\lambda t_F} \ll 1$ が成り立つとして近似的に求めよ。

令和6年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [II] (125 点) 令和5年8月28日(月) 14:40 – 16:00

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 7 頁 (空白の頁を除く), 解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし, 指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [II]

[II-A]

真空中に、位置 $\mathbf{r}$ と時間 t に依存する電荷密度 ρ の電荷と電流密度 $\mathbf{j}$ の電流があるとき、電場 $\mathbf{E}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ が満たすマクスウェル方程式について考える。真空の誘電率を ε_0 、真空の透磁率を μ_0 として、以下の問いに答えよ。

問 1. 微分形のマクスウェル方程式を書け。

ここから、電荷および電流がない場合 ($\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$) を考える。

問 2. マクスウェル方程式を用いて、電場 $\mathbf{E}$ および磁束密度 $\mathbf{B}$ に関する以下の波動方程式を導け。

$$\begin{aligned}\left[\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \left[\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{B} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

ただし、必要であれば、任意のベクトル場 $\mathbf{a}$ に対して、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

が成り立つことを用いてよい。

次に、問 2 の波動方程式の解として、

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_y \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2)$$

という形の平面波を考える。ここで、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ はそれぞれ、3次元直交座標系での x, y, z 方向の単位ベクトルであり、 $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$ の関係がある。また、 E_0 は電場 $\mathbf{E}$ の振幅、 B_0 は磁束密度 $\mathbf{B}$ の振幅、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトル、 ω は角振動数である。

問 3. 波数ベクトル $\mathbf{k}$ が、電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ のいずれにも直交することを示せ。

問 4. 波数ベクトル $\mathbf{k}$ と角振動数 ω の関係を求めよ。また、 $v_p = \omega/|\mathbf{k}|$ で定義される平面波の位相速度 v_p を求めよ。

次に、式 (1), (2) で表される平面波のエネルギー密度を考える。電磁場のエネルギー密度 u_{em} は、

$$u_{\text{em}} = u_{\text{e}} + u_{\text{m}}$$

と書ける。ここで、 u_{e} , u_{m} はそれぞれ、電場、磁場のエネルギー密度であり、電場 $\mathbf{E}$, 磁束密度 $\mathbf{B}$ を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} u_{\text{e}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \\ u_{\text{m}} &= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \end{aligned}$$

以下、問 4 で求めた位相速度 v_{p} を光速 c と表す。

問 5. 電場および磁場のエネルギー密度 u_{e} , u_{m} の間に、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$u_{\text{e}} = u_{\text{m}}$$

問 6. ポインティングベクトル $\mathbf{S}$ は、

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

と定義される。式 (1), (2) で表される平面波に関して、 $\mathbf{S}$ は、以下のように表されることを示せ。

$$\mathbf{S} = c u_{\text{em}} \mathbf{e}_z$$

問 7. 式 (1), (2) で表される平面波に関して、次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\text{em}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

また、この式の物理的意味を簡潔に述べよ。

[II-B]

図1に示すように、点Oを原点とする3次元直交座標系を考える。真空中で、原点Oを中心として、 xy 平面上の円環電流 I が、 z 軸の正方向から見て反時計回りの向きに流れている。円環電流の囲む面積を S とする。 x, y, z 方向の単位ベクトルを、それぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とし、3次元極座標系における r, θ, ϕ 方向の単位ベクトルを、それぞれ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ とする。円環電流の半径に比べて十分に大きな距離 r の位置 $\mathbf{r}$ では、円環電流は磁気双極子とみなすことができる。その磁気双極子モーメント $\mathbf{m}$ は、円環電流の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として、 $\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$ と表される。真空の透磁率を μ_0 として、以下の問いに答えよ。

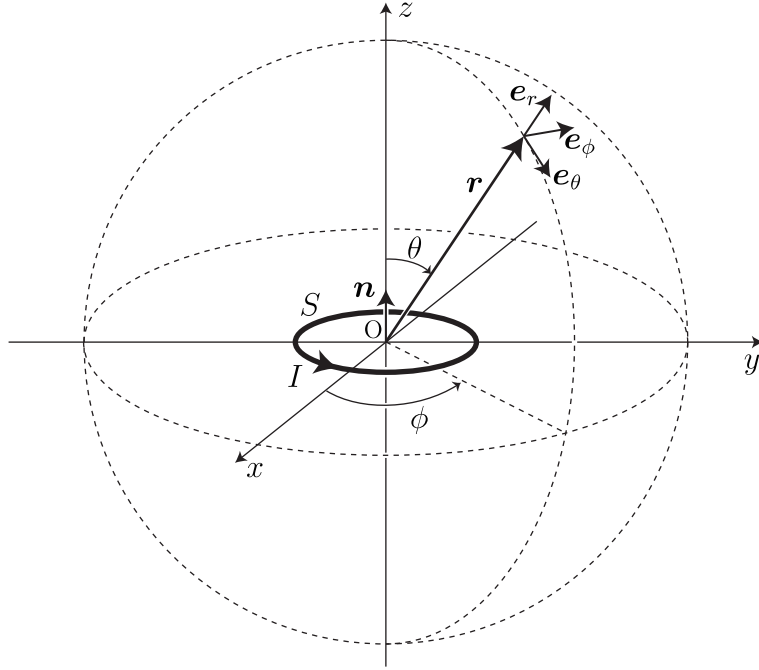


図 1

以下で必要な場合は、次の公式を用いてもよい。ここで、 f は任意のスカラー場、 $\mathbf{a}$ は任意のベクトル場である。また、 a_r, a_θ, a_ϕ はそれぞれ、 $\mathbf{a}$ の $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ 方向の成分であり、 $\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi = (a_r, a_\theta, a_\phi)$ と表す。

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \\ \nabla \times \mathbf{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\phi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

問 1. 原点 O にある磁気双極子モーメント $\mathbf{m}$ が, 位置 $\mathbf{r}$ につくる磁束密度 $\mathbf{B}$ は,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

と表すことができる。 r は円環電流の半径よりも十分に大きいとして, この磁束密度 $\mathbf{B}$ の極座標系における成分 B_r, B_θ, B_ϕ を, それぞれ求めよ。

次に, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を満たすベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を考える。以下では, $\mathbf{A}$ は z 軸に関して対称であり, ϕ に依存しないことを用いてよい。

問 2. 極座標表示したときの $\mathbf{B}$ の θ 成分 B_θ から, $\mathbf{A}$ の ϕ 成分 A_ϕ が満たす方程式を求めよ。

問 3. 問 2 の方程式を A_ϕ について解け。ただし, 積分定数として θ の任意関数 $g(\theta)$ を用いることで, A_ϕ の一般解とせよ。

問 4. 極座標表示したときの $\mathbf{B}$ の r 成分 B_r から, $\mathbf{A}$ の ϕ 成分 A_ϕ が満たす方程式を求めよ。また, 問 3 で $g(\theta) = 0$ とした解が, この方程式を満たすことを示せ。

次に、図2のように、真空中において、超伝導体の板を、その表面が xy 平面となるように置く。さらに、磁気双極子モーメント $\mathbf{m}$ を持つ円環電流を、その中心が超伝導体の板の表面から L だけ離れた点 $(0, 0, L)$ となるように置く。 $\mathbf{m}$ は xz 平面に平行で、 z 軸とのなす角度は α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) である。超伝導体の板の、 xy 平面上の表面の面積は、円環電流の面積よりも十分に大きく、 L も円環電流の半径よりも十分に大きいとする。以下では、磁気双極子モーメントの大きさは m とする。

問 5. 超伝導体に外部から磁束密度を印加したとき、超伝導体の内部の磁束密度がゼロになるように超伝導体の表面に電流が流れる。ここで、図3のように、 xy 平面に平行な半径 R の円形底面を持ち、高さ $2d$ の円柱形の閉曲面を考える。この閉曲面に対して、磁束密度 $\mathbf{B}$ に関するガウスの法則を適用し、 $d \rightarrow 0$ の極限をとることで、 $\mathbf{B}$ の z 成分 B_z が満たす境界条件が、

$$B_z|_{z=+0} = 0$$

となることを示せ。なお、上式は、 xy 平面（超伝導体の板の表面）の $z > 0$ の側（超伝導体の外側）において、 $B_z = 0$ であることを意味する。

超伝導体と円環電流が存在するとき、 $z > 0$ での磁束密度は、円環電流がつくる磁束密度と超伝導体表面を流れる電流がつくる磁束密度の重ね合わせとなる。この重ね合わせた磁束密度は、図4 (a) のように、超伝導体を取り除いて、点 $(0, 0, -L)$ に磁気双極子モーメントの鏡像があると仮定すると再現できる。この鏡像磁気双極子モーメント $\mathbf{m}'$ は、大きさは m で、 z 軸との角度 $(\pi - \alpha)$ で xz 平面内にある。

問 6. 鏡像磁気双極子モーメント $\mathbf{m}'$ が円環電流の中心の位置 $(0, 0, L)$ につくる磁束密度を計算することにより、超伝導体の表面を流れる電流が位置 $(0, 0, L)$ につくる磁束密度 $\mathbf{B}_{SC}$ を求めよ。ただし、図4 (b) のように、点 $(0, 0, -L)$ を原点 O' とし、 $\mathbf{m}'$ の向きを図1の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と対応させた3次元極座標系を考えると、円環電流の中心の位置は $\mathbf{r}' = (r', \theta', \phi') = (2L, \pi - \alpha, 0)$ と表され、 r', θ', ϕ' 方向の単位ベクトルはそれぞれ、 $\mathbf{e}_{r'} = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_{\theta'} = -\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_{\phi'} = -\mathbf{e}_y$ となることに注意せよ。

問 7. 問6で求めた磁束密度 $\mathbf{B}_{SC}$ の中に磁気双極子モーメント $\mathbf{m}$ が存在するとき、 $\mathbf{m}$ は $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{SC}$ のトルクを受ける。 $\boldsymbol{\tau}$ を求めよ。

問 8. この円環電流に関して、点 $(0, 0, L)$ を中心とする、 xz 平面内での回転運動を考える。ここで、 $\mathbf{m}$ と z 軸のなす角度を、改めて β としたとき、 $0 \leq \beta < 2\pi$ の範囲において、 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ となる角度 β を全て求めよ。また、求めた角度 β のうち、 β の微小変化に対して安定な平衡となるものを全て答え、その理由を簡潔に述べよ。

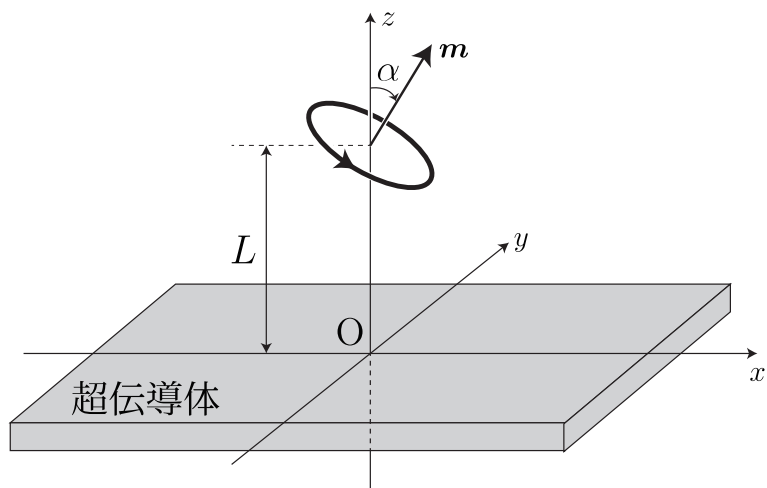
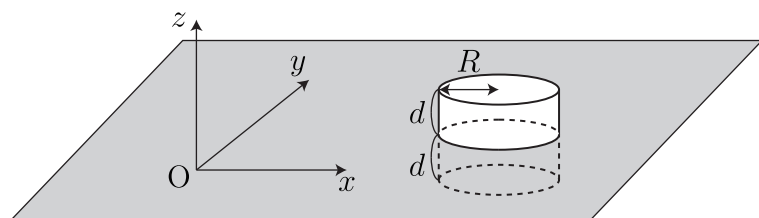


图 2



超伝導体表面

图 3

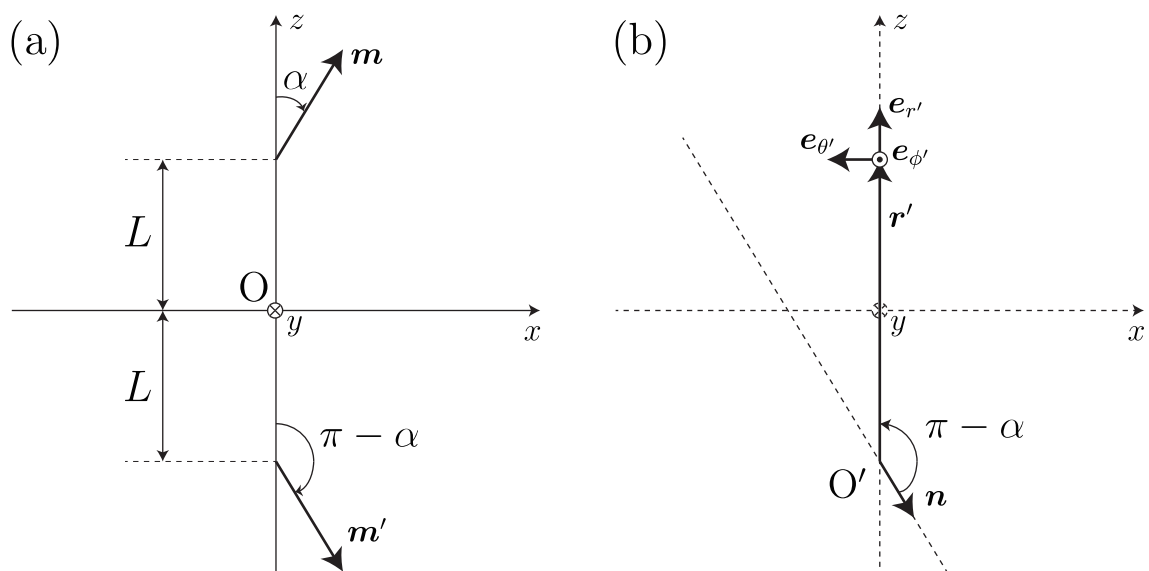


图 4

令和6年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [III] (125 点) 令和5年8月28日(月) 16:20 – 17:40

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 5 頁 (空白の頁を除く), 解答紙は 2 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし, 指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [III]

以下の問題ではプランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$, 虚数単位を i と表す。また, 複素数 ζ の複素共役を ζ^* , 絶対値を $|\zeta|$ と表し, これらの記号は特に断りなく解答に用いてよい。

[III-A]

質量 m の粒子が両端を無限に高い壁で挟まれた幅 L の 1 次元ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \leq L/2) \\ \infty & (|x| > L/2) \end{cases}$$

のもとで運動している。以下の問いに答えよ。

- 問 1.** この粒子の波動関数を $\varphi(x)$, エネルギー固有値を ε として, $|x| \leq L/2$ での時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。
- 問 2.** A, B を任意定数としたとき, $\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx$ が **問 1** のシュレディンガー方程式の解となっていることを示し, k を求めよ。ここで, $k > 0$ である。
- 問 3.** この粒子の n 番目 ($n = 1, 2, 3, \dots$) のエネルギー固有値 ε_n を求めよ。ただし, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 \dots$ とする。
- 問 4.** 固有値 ε_n に対応する固有関数 $\varphi_n(x)$ を求めよ。ただし A, B が非負の実定数となるように規格化せよ。

次に, $x = \pm L/2$ にある壁が, 急に $x = \pm L$ に広がったとする。

- 問 5.** 壁が広がった後のポテンシャルのもとで, N 番目 ($N = 1, 2, 3, \dots$) のエネルギー固有値 E_N と, それに対応する規格化された固有関数 $\Phi_N(x)$ を求めよ。答のみでよい。
- 問 6.** **問 5** で求めた E_1 と **問 3** で求めた ε_1 の大小を比較せよ。さらに, 壁が広がる前後で, 基底状態のエネルギー固有値の大小関係が生じた理由を, 不確定性関係の観点から説明せよ。ここでの不確定性関係とは, 粒子の位置と運動量の不確定さの間に以下の関係があることを指す。

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

ここで, Δx は位置の不確定さ, Δp は運動量の不確定さを表す。

以下では、壁が拡がる前に基底状態にあった粒子が、その直後にまだ同じ波動関数のままとどまっている状況を考える。このとき、この粒子の波動関数は

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & (|x| \leq L/2) \\ 0 & (L/2 < |x| \leq L) \end{cases}$$

で与えられるとする。ただし、 $\varphi_1(x)$ は **問 4** で求めた基底状態の固有関数である。さらにこの波動関数は、 C_N を展開係数として、**問 5** の固有関数 $\Phi_N(x)$ を使って

$$\Psi(x) = \sum_N C_N \Phi_N(x)$$

と展開できる。ただし、固有関数系 $\{\Phi_N(x)\}$ は完全系で正規直交性

$$\int_{-L}^L \Phi_M^*(x) \Phi_N(x) dx = \begin{cases} 1 & (M = N) \\ 0 & (M \neq N) \end{cases}$$

を満たす。ここで、 M, N は任意の正の整数である。

問 7. 展開係数 C_N は具体的に

$$C_N = \begin{cases} \frac{8\sqrt{2}}{(4 - N^2)\pi} \cos \frac{N\pi}{4} & (N \text{ は奇数}) \\ 0 & (N \text{ は偶数}) \end{cases}$$

と表すことができる。 N が偶数の場合について、上式を証明せよ。

問 8. 壁が拡がった直後に、この粒子のエネルギーを測定したときの期待値 $\langle E \rangle$ を考える。 $\langle E \rangle$ は C_N, E_N を用いた級数和の形で表すことができる。演算子 $\hat{F}$ で表される物理量を測定したときの期待値が $\int_{-L}^L \Psi^*(x) \hat{F} \Psi(x) dx$ であることを用いて、 $\langle E \rangle$ の級数和の表式を導け。

問 9. **問 8** で求めた $\langle E \rangle$ を、**問 7** で与えた C_N を用いて具体的に計算し、その結果と **問 3** で求めた ε_1 との大小を比較せよ。なお、必要に応じて以下の無限級数の和の公式を用いてよい。

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell - 1)^2}{(4\ell^2 - 4\ell - 3)^2} = \frac{\pi^2}{16}$$

[III-B]

電子はスピンという内部自由度を持ち、電子のスピンのは大きさは $s = \hbar/2$ である。スピン演算子 $\hat{\mathbf{S}}$ の xyz 座標系における成分 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ はエルミート演算子で、

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar \hat{S}_x, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y$$

の交換則を満たす。量子化軸を z 軸にとると $\hat{S}_z$ は固有値 $\pm\hbar/2$ を持ち、 $+\hbar/2$ に対応する固有状態を $|+\frac{1}{2}\rangle$, $-\hbar/2$ に対応する固有状態を $|-\frac{1}{2}\rangle$ と表す。このとき、 $|+\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle$ は演算子 $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$ の固有状態でもあり、その固有値はともに $s(s+\hbar) = 3\hbar^2/4$ となる。以下の問いに答えよ。

問 1. 演算子 $\hat{S}_{\pm}$ を $\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ (複号同順) と定義するとき、以下の関係が成り立つことを示せ。

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_{\pm}] = \pm\hbar \hat{S}_{\pm} \quad (\text{複号同順})$$

問 2. $\hat{S}_+ |-\frac{1}{2}\rangle, \hat{S}_- |+\frac{1}{2}\rangle$ がともに $\hat{S}_z$ の固有状態であることを示し、固有値を求めよ。

問 3. 問 2 より、 α, β を複素数の定数として $\hat{S}_+ |-\frac{1}{2}\rangle = \alpha |+\frac{1}{2}\rangle, \hat{S}_- |+\frac{1}{2}\rangle = \beta |-\frac{1}{2}\rangle$ となることを説明せよ。

$\hat{S}_z$ の 2 つの固有状態を 2 次元列ベクトルを用いて $|+\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表すとき、 $\hat{S}_z$ は 2 行 2 列の行列を用いて

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表すことができる。

問 4. 2 行 2 列の行列を用いて、 $\hat{\mathbf{S}}^2, \hat{S}_+, \hat{S}_-$ をそれぞれ表せ。ただし、 $\hat{S}_+, \hat{S}_-$ については 問 3 で与えた α, β のうち必要なものを用いて答えよ。

問 5. $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ がエルミート演算子であることに注意して、 α と β の間に成り立つ関係式を導け。

問 6. α を正の実数として、 $\hat{\mathbf{S}}^2$ と $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ の関係から α を求めよ。このとき、 $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ が 2 行 2 列の行列を用いて、以下のように表されることを示せ。

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

次に、磁場中の電子のスピンについて考える。磁束密度が $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ と表されるとき、式 (1), (2) の演算子 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ で表される電子のスピンと磁束密度との相互作用ハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = -\mu (B_x \hat{S}_x + B_y \hat{S}_y + B_z \hat{S}_z)$$

で与えられるものとする。ただし、 μ は実定数である。ここで、空間的に一様で y 軸に垂直な磁束密度 $\mathbf{B} = (B_0 \sin \theta_0, 0, B_0 \cos \theta_0)$ を加えた。 B_0 は磁束密度の大きさ、 θ_0 は磁束密度と z 軸との成す角である。

問 7. 時刻 t における電子のスピン状態を $|\psi(t)\rangle$ とするとき、時間に依存するシュレディンガー方程式の解は以下の形で表すことができる。

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left(\boxed{\text{ア}} \hat{H} \right) |\psi(0)\rangle \quad (3)$$

$\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる表式を書け。なお、演算子 $\hat{X}$ の指数関数は、 $\hat{I}$ を恒等演算子として

$$\exp \hat{X} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\hat{X}^{\ell}}{\ell!} = \hat{I} + \hat{X} + \frac{\hat{X}^2}{2!} + \frac{\hat{X}^3}{3!} + \cdots$$

で定義される。

問 8. ハミルトニアン $\hat{H}$ を 2 行 2 列の行列を用いて表し、 $\hat{H}^2$ が $\hat{I}$ のスカラー倍になることを利用して具体的に指数関数の展開の計算を進めると、**問 7** の式 (3) は以下の形に整理できる。

$$|\psi(t)\rangle = \left(\boxed{\text{イ}} \hat{I} + \boxed{\text{ウ}} \hat{H} \right) |\psi(0)\rangle \quad (4)$$

$\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる表式を書け。ここで、実数 x に対して、以下の展開式が成り立つことは証明なしに用いてよい。

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!} x^{2\ell} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

問 9. 電子のスピン状態が時刻 $t = 0$ において $|\psi(0)\rangle = |+\frac{1}{2}\rangle$ であったとする。時刻 t において、状態を 2 次元列ベクトルを用いて $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ と表すとき、 $|-\frac{1}{2}\rangle$ への遷移確率を $a(t), b(t)$ のうち必要なものを用いて表せ。また、その遷移確率を t, μ, B_0, θ_0 を用いて具体的に示せ。

令和6年度 大学院修士課程 入学試験問題

物理学 [IV] (125 点) 令和5年8月29日(火) 9:00 – 10:20

注意事項

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子はこの表紙を含めて 4 頁 (空白の頁を除く), 解答紙は 3 枚である。
3. すべての解答紙に受験番号を記入すること。
4. 大問ごとに指定された解答紙に解答すること。ただし, 指定された解答紙の裏面も使ってよい。
5. 問題冊子は持ち帰ること。

物理学 [IV]

全問を通して

k_B : ボルツマン定数

$\hbar$: プランク定数 h を 2π で割った数 $\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$

と表記する。

[IV-A]

単原子分子からなる n モルの古典的な理想気体について考える。熱平衡状態における圧力, 体積, 温度をそれぞれ P, V, T として, 状態方程式は $PV = nRT$ で与えられる。ここで, R は気体定数である。以下の問いに答えよ。

問 1. 温度 T の熱平衡状態における内部エネルギーの値を書け。答のみでよい。

問 2. 温度が T から $T + dT$ に, 体積が V から $V + dV$ に微小変化する準静的過程を考える。変化前の熱平衡状態のエントロピーを S , 変化後の熱平衡状態のエントロピーを $S + dS$ とすると

$$dS = \frac{3}{2}nR \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

であることを説明せよ。

問 3. 温度 T , 体積 V_1 の熱平衡状態を用意し, このときのエントロピーを S とする。この状態から, 断熱自由膨張を行い, 十分な時間待って, 体積 V_2 の熱平衡状態を得た。このときのエントロピーを $S + \Delta S$ とする。この過程は準静的でないにもかかわらず, ΔS が計算できることを説明し, その値を求めよ。ただし, エントロピーが状態量であることは用いてよい。

[IV-B]

カノニカル・アンサンブル（正準集団）について考える。系のとりうる状態は $1, 2, 3, \dots$ と番号付けできるとし、 n 番目 ($n = 1, 2, 3, \dots$) の状態のエネルギーの値を E_n とする。この系のアンサンブルがあって、 n 番目の状態のアンサンブルにおける出現確率を p_n とする。この p_n はパラメータ β を用いて $p_n = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_n)$ の形に書ける。ここで、 Z と β は n にはよらない。以下の問いに答えよ。

問 1. Z の値を決める関係式を示せ。

問 2. アンサンブルにおけるエネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ は $\langle E \rangle = \sum_n p_n E_n$ により与えられる。**問 1** のように決まる Z は β の関数となっている。このとき

$$\langle E \rangle = -\frac{d \ln Z}{d\beta}$$

と書けることを示せ。

以下では、必要があれば、関係式 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ を用いてよい。ここで、 T は温度である。

問 3. エネルギーのゆらぎ $(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ を考える。ここで、 $\langle E^2 \rangle = \sum_n p_n E_n^2$ である。熱容量 C が $C = \frac{d\langle E \rangle}{dT}$ で与えられるとして、 C と $(\Delta E)^2$ の関係を求めよ。

問 4. エントロピー S が、 $S = -k_B \sum_n p_n \ln p_n$ で与えられるとする。このとき、ヘルムホルツの自由エネルギー F が、 $F = -k_B T \ln Z$ と表されることを示せ。

[IV-C]

グランドカノニカル分布（大正準分布）を用いて、自由粒子の系を考える。系は温度 T 、化学ポテンシャル μ の熱浴と接して熱平衡状態にあるとする。波数 $\mathbf{k}$ の粒子 1 個のエネルギーを $\varepsilon(\mathbf{k})$ 、この波数の粒子の個数を $n(\mathbf{k})$ とする。以下の問いに答えよ。

問 1. グランドカノニカル分布における、ボース粒子の粒子数期待値を $\langle n(\mathbf{k}) \rangle_B$ 、フェルミ粒子の粒子数期待値を $\langle n(\mathbf{k}) \rangle_F$ と書くことにする。それぞれの関数形（ボース分布関数およびフェルミ分布関数）を書け。ただし、スピンなどの内部自由度は考えないものとする。

問 2. $T = 0$ におけるフェルミ分布関数 $\langle n(\mathbf{k}) \rangle_F$ を波数 $\mathbf{k}$ の大きさ $k = |\mathbf{k}|$ の関数として図示せよ。ただし、長さ L の立方体の領域に N 個の粒子が存在する系を考え、 L は十分に大きいとする。また、フェルミ波数の大きさ k_F を L と N を用いて表せ。

以下では、光子が長さ L の立方体の空洞中に存在する系を考える。空洞の周囲は物質で満たされていて、光子と物質は、温度 T の熱平衡状態にあるものとする。波数 $\mathbf{k}$ の光子 1 個のエネルギーを $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar c k$ とする。ここで、 c は光速である。光子の粒子数期待値は、ボース分布関数 $\langle n(\mathbf{k}) \rangle_B$ において $\mu = 0$ としたものを $\langle n(\mathbf{k}) \rangle_0$ として、光子の偏光の自由度 2 を考慮すると、 $2\langle n(\mathbf{k}) \rangle_0$ で与えられる。

問 3. 光子の化学ポテンシャルが $\mu = 0$ である理由を説明せよ。

問 4. 光子の全エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を $\mathbf{k}$ についての和として表すと、 $\langle E \rangle = \sum_{\mathbf{k}} f(k)$ のように書ける。この $f(k)$ を求めよ。

問 5. L が十分に大きいとして、**問 4** の $\langle E \rangle$ を k についての積分として表すと、 $\langle E \rangle = \int_0^\infty g(k) dk$ のように書ける。この $g(k)$ を求めよ。

問 6. **問 5** の積分は温度 T の関数として、 $\langle E \rangle = AT^4$ と書ける。この係数 A を求めよ。必要があれば、

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

を用いてよい。

問 7. 波数 $\mathbf{k}$ の光子が運動量 $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ の粒子であるとして、気体分子運動論を用いて、光子が物質の壁に与える圧力 P と $\langle E \rangle$ の関係が

$$P = \frac{\langle E \rangle}{3L^3}$$

となることを示せ。ただし、光子と壁との衝突は完全弾性衝突であるとし、圧力は、光子が壁に与える力積の時間的平均から決まるものとする。