九州大学理学部物理学科（物理学コース）
平成20年度　第３年次編入学試験

物理学

平成19年7月7日(土)　9:00—12:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと.

(2) 問題冊子は表紙を含め７枚で、問題は **[I] から [III]** までである。

(3) 解答用紙には、それぞれ受験番号と氏名を記入すること.

(4) 解答は解答用紙の指定された箇所に記入すること．下書きには問題用紙の余白や裏面などを利用し，解答用紙の余白には下書きをしないこと.

(5) 問題冊子は持ち帰ること.

[I] (80 点)

[I − 1] 2 次元の力の場 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ のもとで、平面内を運動する質量 m の質点を考える。力の場 $\boldsymbol{F}$ が、

$$F_x = -ax(x^2 + y^2)$$
$$F_y = -ay(x^2 + y^2)$$

で与えられる時、以下の問いに答えよ。ただし、a は定数とする。また、デカルト座標系を下図のようにとり、質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y)$ とする。

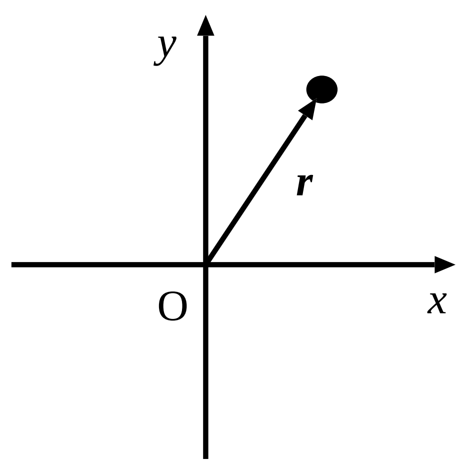
1. 一般の 2 次元の力の場 $\boldsymbol{F}$ が、保存力であるための条件式を書け。

2. 上で与えた力の場 $\boldsymbol{F}$ は保存力か、保存力でないか？前問の条件式に基づき判定せよ。

   さらに、保存力の場合には、力のポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ。ただし、$x = y = 0$ の時、$U(x, y) = 0$ とする。

3. z 軸を、紙面に垂直 手前向きにとる。質点の原点 O に関する角運動量 (ベクトル) の z 成分 L_z を、その位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y)$ および運動量ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ の成分を用いて表せ。

4. L_z は保存しているか？運動方程式を用いて判定せよ。



[I − 2]　質量の無視できる長さ l の棒の一端に質量 m の質点を付け、他端を O に固定した振り子の、鉛直面内の運動を考える。ただし、振り子は O のまわりに滑らかに回転するとする。また、振り子の向きは鉛直下向きから反時計回りに測った角度 θ で表し、重力加速度の大きさを g とする。

1. 図のように、質点に糸を付け、水平方向から力を加え質点を静止させたとき、質点に加わっている力をすべて挙げよ。解答欄の図に、力のベクトルを矢印で、その大きさを式で、それぞれ書き込め。

2. 次に、水平方向の糸を切って、質点を鉛直面内で運動させる。以下の問いに答えよ。ただし、時刻を t とし、θ の t についての 1 階および 2 階微分を、それぞれ $\dot{\theta}$ および $\ddot{\theta}$ と表す。また、x 軸および y 軸を図のようにとる。

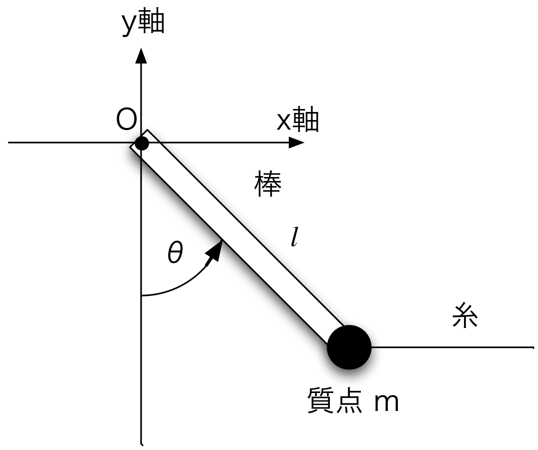
   (a) 質点の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の x 成分 v_x と y 成分 v_y を、θ およびその時間微分などを用いて表せ。

   (b) 棒が質点に及ぼす力は棒に平行な成分しか持たない。それを T として、質点に関する x 方向と y 方向の運動方程式を、θ およびその時間微分などを用いて表せ。ただし、T は O に向かう向きを正にとる。

   (c) x 方向と y 方向の運動方程式から T を消去して、次の微分方程式
   $$\ddot{\theta} = -A\sin\theta \tag{1}$$
   が導ける。A を求めよ。

   (d) 振り子が微小振動をしている時、(1) 式はどう近似できるか示せ。

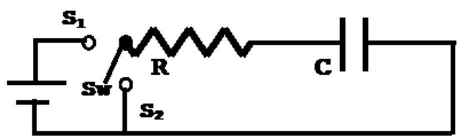
   (e) $t = 0$ での初期条件が $\theta = \theta_0$ および $\dot{\theta} = \omega_0$ で与えられる時、(d) で近似した微分方程式を解いて、θ を時刻 t の関数として求めよ。ただし、答えに A をそのまま用いること。また、微分方程式
   $$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$
   の 2 つの独立な解が $\sin x$ と $\cos x$ であることを使って良い。

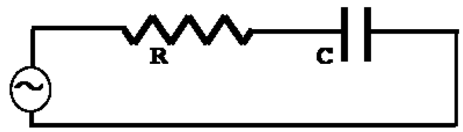


[II]　(80 点)

単位は MKSA 単位 (SI) 系とし、真空の誘電率を ε_0[F/m] とする。

[II − 1]　内部抵抗がゼロの直流 (左図) または交流 (右図) 電源、抵抗 (抵抗値 R[Ω])、コンデンサー (容量 C[F])、スイッチ (Sw) からなる回路について、以下の問いに答えよ。ただし、コンデンサーにかかる電圧を V[V]、コンデンサーに蓄えられた電荷量を Q[C]、回路を流れる電流を I[A]、時刻を t[s] とする。





(1) 左図のように、スイッチを S_1 に接続して V_{DC}[V] 出力する直流電源につないだ場合を考える。十分時間がたった後、コンデンサーにかかる電圧 V はいくらになるか？理由とともに述べよ。

(2) 次に、スイッチ Sw を S_1 から S_2 に切り替えたところ、コンデンサーにかかる電圧 V が減少した。V の時間変化を記述する微分方程式を、電圧 V、電流 I、電荷量 Q の関係から導け。

(3) (2) で得た方程式を解くことにより、V が、スイッチ切り替え前の値の $1/e^2$ になる時刻 t を求めよ。ただし、スイッチを切替えた時刻を $t = 0$ とする。また、e は自然対数の底である。

(4) 右図のように、出力電圧が $V_{AC}(t) = V_0 \cos \omega t$ [V] で与えられる交流電源をつないで、十分時間がたった後の状況を考える。

コンデンサーにかかる電圧 V の時間変化を、以下の手順で求めよ。

(i) この場合に、コンデンサーの電圧 V の満たす微分方程式を導け。

(ii) この方程式の解を $V = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ とおいて、定数 A および B を求めよ。

[II − 2]　真空中におかれた、図のような断面を持つ、電極面積 $S[\mathrm{m}^2]$ の２枚の電極からなる平行平板型コンデンサーを考える。上側電極に $+Q[\mathrm{C}]$、下側電極に $-Q$ の電荷が分布しており、電極は系外から絶縁されているとして、以下の問いに答えよ。

(1) 平板の中心部分と端では電気力線の分布が異なること（端の効果）を考えて、電気力線の概形を解答用紙に記入せよ。

次に、極板間の距離に対して電極が十分大きく、端の効果が無視できる場合を考える。

(2) コンデンサー内の電場を、ガウスの法則を使って求めよ。

(3) この平板間（図の平板と点線で囲まれた領域）に比誘電率 $\varepsilon\ (>1)$ の誘電体を挿入した。この時、誘電体に誘起される巨視的電荷（分極電荷）を解答用紙の図に示せ。正電荷を $+$、負電荷を $-$ で表すこと。

また、誘電体の挿入で、電極間の電位差は、（変化なし、減る、増える）のいずれか？理由と共に答えよ。

[II − 3]　時間変化のない場合には、電場 $\boldsymbol{E}$ は、電位（スカラーポテンシャル）ϕ を用いて $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ と表せる。しかし、時間変化のある場合には、この式は一般には成り立たない。このことを Maxwell の方程式に基づいて説明せよ。ただし、Maxwell の方程式は、標準的記号を用いて

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

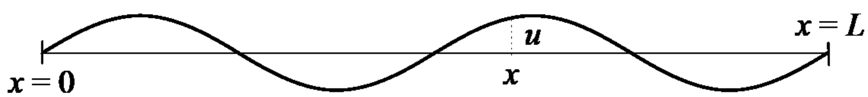
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{t}}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

である。

[III]　(80 点)

以下の問いに答えよ。ただし、答えを導いた過程も記すこと。

[III − 1]　図のように、両端が固定された一様な細い弦の横振動を考え、x 軸に垂直な方向の変位 u に注目する。弦は大きさ T の張力で引っ張られており、弦の単位長さあたりの質量を σ とする。



このとき、位置 x での時刻 t における変位 u は、微分方程式

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

に従うものとする。

以下では、この微分方程式の解として、基準振動

$$u = A \sin(kx + \theta) \cos(\omega t + \phi)$$

を考える。ここに、$A, k, \omega, \theta, \phi$ は全て定数であり、$k > 0, \omega > 0$ とする。

(1) u が解となるとき、k と ω の関係を求めよ。

(2) k と θ のとりうる値を求めよ。ただし、$x = 0$ と $x = L$ を弦の両端の位置とし、$-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする。

(3) $\theta = 0, \phi = 0$ のとき、u は 2 つの単純な進行波の重ね合わせになっていることを示せ。また、重ね合わされているそれぞれの波はどのような波か、簡単に説明せよ。

[III − 2]　1 モルの理想気体の体積 V と温度 T を準静的に変化させることを考える。気体の圧力 p、内部エネルギー U、エントロピー S は、V と T の関数として決まる。理想気体は、ボイル-シャルルの法則 $pV = RT$ とベルヌーイの法則 $pV = \frac{2}{3}U$ に従うものとする。ここに、R は気体定数である。

(1) 準静的な微小変化では、$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$ が成り立つ。この式の 2 つの項、$T\mathrm{d}S$ と $p\mathrm{d}V$ は、何を表すか？それぞれ 15 字以内で説明せよ。ここに、$\mathrm{d}X$ は X の微小変化を表すものとする。

(2) T の関数 $f(T)$ と V の関数 $g(V)$ を用いて、エントロピーの準静的な微小変化は $\mathrm{d}S = f(T)\mathrm{d}T + g(V)\mathrm{d}V$ と表される。この $f(T)$ と $g(V)$ を求めよ。

(3) 準静的な断熱過程で体積を V_1 から V_2 に変化させた。このとき、温度が T_1 から T_2 に変化した。温度比 T_1/T_2 を体積比 V_1/V_2 を用いて表せ。

(4) ヘルムホルツの自由エネルギー F を $F = U - TS$ のように導入する。準静的な等温過程で体積を V_1 から V_2 に変化させたときの F の変化 ΔF を求めよ。

(5) 最後に、理想気体に限らず、一般の系のヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ を考える。

(i) F の準静的な微小変化 $\mathrm{d}F$ の表式を求めよ。ただし、一般の系の準静的な微小変化においても、$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$ が成り立つ。

(ii) 圧力 p とエントロピー S をそれぞれ F の偏微分で表せ。ただし、F は体積 V と温度 T の関数として表されているとする。