九州大学理学部物理学科(物理学コース)

平成２７年度　第３年次編入学試験

物理学

平成２６年７月５日（土）　９:００－１２:００

注意事項

（1）試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。
（2）問題冊子は表紙を含めて 7 枚で、問題は[I]から[IV]まである。
（3）解答用紙には、用紙ごとに受験番号と氏名を記入すること。
（4）解答は指定された解答用紙に記入すること。指定された解答用紙であれば、裏面を使って解答してもよい。下書きには問題用紙の余白や裏などを利用し、解答用紙の余白や裏面には下書きをしないこと。
（5）解答用紙に書ききれない場合や、用紙を取り替えたい場合は、試験監督に申し出ること。
（6）問題冊子は持ち帰ってよい。

[I] (80 点)

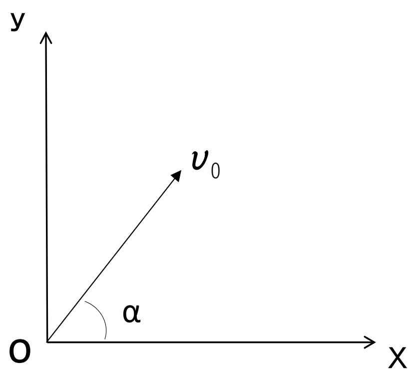
[I-1] 速度 $\boldsymbol{v}$ に比例する抵抗力が働く場合の、質点の運動を調べよう。図のように、質量 m の質点を原点 O から x 軸と角度 α をなす方向に初速 v_0 で、時刻 $t=0$ に投げたとする。抵抗力は正の定数 k を用いて $-mk\boldsymbol{v}$ と表されるとして、以下の問いに答えよ。ただし、座標系は y 軸が鉛直上向きの直交座標系とし、重力加速度は y 軸方向下向きで、大きさを g とする。

(1) 速度 $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y)$ を変数として、質点の運動方程式を書け。

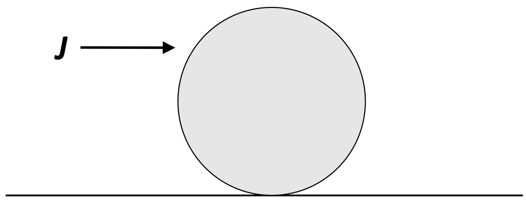
(2) この運動方程式を解いて、時刻 t での質点の速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ。

(3) 時刻 t での質点の位置 (x, y) を求めよ。

(4) 時刻無限大での質点の速度と x 座標を求めよ。



[I-2] 水平な台の上にある球の運動を考える。球の密度は一様で、質量 M, 半径 a とする。



(1) 球の重心のまわりの慣性モーメント I は $\frac{2}{5}Ma^2$ となることを示せ。

まず、台の上で静止している球に、球の中心を通る鉛直面内で、中心より h だけ上方の点に水平方向に力積 J の撃力を加えた。

(2) 撃力を加えた直後の球の重心の速さ v_0、および重心のまわりの回転の角速度 ω_0 を J, M, I, h のうち必要なものを用いて求めよ。ただし、球と台との摩擦力の影響は無視できるとする。

(3) 球が滑らずに転がるとき h は a の何倍か。

その後、球が滑らずに転がりながら下図のように、高さ $L\,(L < a)$ の台の縁 P に速度 v_0、角速度 ω_0 でぶつかった。球は縁 P で滑りがなく、あがりきるまで P 点から離れないものとする。以下の問に答えよ。重力加速度を g とする。

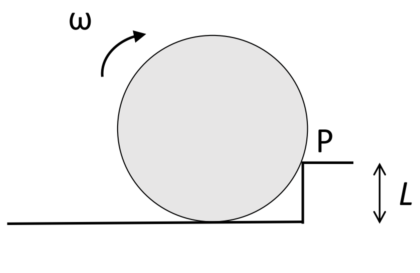
(4) 球が P 点に接触しているとき、P 点を通って紙面に垂直な軸の周りの慣性モーメント I_P を求めよ。

(5) 衝突直前、直後で P 点のまわりの角運動量は保存する。ぶつかった直後の球の角速度を ω とし、この角運動量保存則を書け。また、ω を a, L, ω_0 を用いて表せ。

(6) 衝突直後の球の運動エネルギーを求めよ。

(7) 球が台から縁を乗り越えたとき球の位置エネルギーはどれだけ増加するか。

(8) 衝突直後の運動エネルギーが位置エネルギーの差より大きければ球は縁を乗り越えることができる。乗り越えるのに要する最小の速度 v_0 を a, L, g を用いて表せ。



[II] (80 点)

以下の電磁気学の問題では、SI 単位系を用い、真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0 と μ_0 とする。なお、解答には導出過程を含め、必要に応じて図などを用いて説明すること。

[II-1] 太さの無視できる直線状の無限に長い導線が真空中に置かれている。以下の問題に答えよ。

(1) この導線に一様な正電荷を与えた時、電場の方向がどのようになるかを答えよ (理由は述べなくてよい)。次に、電場 $\boldsymbol{E}$ に対するガウスの法則は面積分によって以下のように与えられる:

$$\int_{S_0} \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{n}\, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \Big[\text{閉曲面 } S_0 \text{ 内部の全電荷} \Big].$$

この法則を用いて直線から距離 R 離れた点での電場の大きさを求めよ。ただし、単位長さあたりの電荷を λ とし、S_0 としてどのような閉曲面を用いたか明記すること。

(2) この導線に一様な定常電流を流した時、磁束密度の方向がどのようになるかを答えよ (理由は述べなくてよい)。次に、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対するアンペールの法則は線積分によって以下のように与えられる:

$$\int_{C_0} \boldsymbol{B} \quad d\boldsymbol{s} = \mu_0 \Big[\text{閉曲線 } C_0 \text{ に囲まれる曲面を表方向に貫く全電流} \Big].$$

この法則を用いて直線から距離 R 離れた点での磁束密度の大きさを求めよ。ただし、流した電流を I とし、C_0 としてどのような閉曲線を用いたか明記すること。

[II-2] 空間内に z 軸方向には一様で z 軸の正方向に向いた磁場が存在し、その磁束密度の大きさは z 軸からの距離が ρ の点で

$$B(\rho) = B_0 \left(\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2 + \rho^2} \right)^2 \qquad \text{(A)}$$

と与えられるものとする。ここで、B_0 と ρ_0 は正の定数である。この空間において、質量 m で正電荷 q $(q > 0)$ を持つ粒子が運動する場合を考え、以下の問題に答えよ。

(1) 粒子は z 軸に垂直な平面内で z 軸を中心に半径 ρ で等速円運動しているとする。この時の円運動の向きと速さ v を求めよ。ただし、向きとしては z 軸を進む向きとして右ネジ回りか左ネジ回りかで答えよ。

(2) 荷電粒子が等速円運動している時には、円電流が流れているとみなせる。前問 (1) の場合の円電流の大きさ I を求めよ。

問 (1) のように z 軸の回りに円運動している粒子に対して、時間を t として式 (A) の定数 B_0 を $B_0 = B_1 t$ (B_1 は正の定数) のように増加させると、ファラデーの電磁誘導の法則によって接線方向に電場が生じ、この荷電粒子はこの電場からの力も受ける。ここで、ファラデーの電磁誘導の法則は電場を $\boldsymbol{E}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$ として、

$$\int_{C_1} \boldsymbol{E} \quad d\boldsymbol{s} = \quad \int_{S_1} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \boldsymbol{n}\, dS \tag{B}$$

と表される。

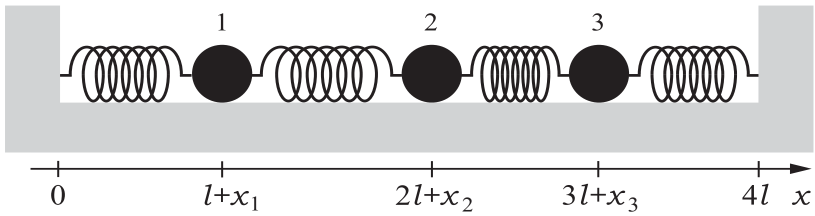
(3) 積分に現れる C_1 や S_1 がどのような曲線や曲面を表すか明記して、式 (B) の意味するところを説明せよ。

(4) 問 (1) のように半径 ρ で z 軸の回りに等速円運動していた粒子に対し、上のように B_0 を増加させた時、ファラデーの法則 (B) を用いてこの粒子に働く接線方向の力を求め、粒子は加速するか減速するか答えよ。

(5) 一般には、問 (1) のように等速円運動していた粒子が接線方向に力を受けると、粒子の軌道は円軌道からずれる。しかしながら、この問題で与えられたような磁場に対しては、力を受けても半径が一定になるような円軌道が存在する。そのような円軌道の半径 ρ を求めよ。

[III] (40 点)

図のように，4 本のバネ（バネ定数 k，自然長 l）でつながれた質量 m の 3 個の質点（質点 1，質点 2，質点 3）の連成振動について考える。バネは x 軸に沿って伸縮し，両端（$x = 0$ と $x = 4l$）は固定されている。各質点の平衡位置（$x = l,\ 2l,\ 3l$）からの変位をそれぞれ x_1，x_2，x_3 とする。



(1) 質点 1，2，3 にはたらく力をそれぞれ F_1，F_2，F_3 とする。この系のポテンシャル V は

$$V = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2 + \frac{k}{2}x_3^2$$

で与えられる。V から F_1，F_2，F_3 を求めよ。

(2) 質点にはたらく力は前問のポテンシャルによる力のみとして，各質点の運動方程式を記せ。

(3) 運動方程式の解として，すべての質点が同じ振動数 ω で振動する解（基準振動）$x_n = c_n \cos(\omega t)$ を考える（$n = 1,\ 2,\ 3$）。ここに，t は時刻である。

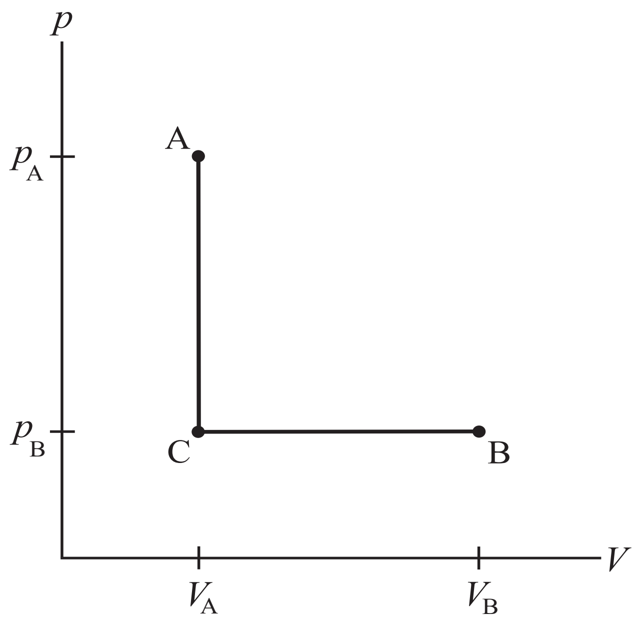
$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外の解が存在するために ω が満たすべき条件を求めよ。

(4) 前問の条件を満たす ω を 3 つ求めよ。ただし，$\omega > 0$ とする。

(5) 前問で求めた 3 つの ω のうち最小の ω での基準振動について，比 $c_1 : c_2 : c_3$ を求めよ。

[IV] (40 点)

図のような 1mol の理想気体（圧力 p、体積 V、温度 T）の状態変化 A $\to$ B $\to$ C $\to$ A（マイヤーのサイクル）を考える。A $\to$ B の変化では、気体は断熱的に自由膨張する。この変化は準静的ではないので、変化の経路を図には描いていない。B $\to$ C の変化では、気体は準静的に定圧で圧縮される。C $\to$ A の変化では、気体は準静的に定積で加熱される。線分 BC および CA 上の各点に対応した熱平衡状態では、気体定数を R として、状態方程式 $pV = RT$ が成り立つ。理想気体の定積モル比熱を c_V、定圧モル比熱を c_p とする。A における気体の圧力、体積、温度をそれぞれ p_{A}、V_{A}、T_{A} とする。同様に、B においては p_{B}、V_{B}、T_{B}、C においては p_{B}、V_{A}、T_{C} とする。



(1) 理想気体の内部エネルギーが温度のみの関数であるとして、$T_{\mathrm{A}} = T_{\mathrm{B}}$ であることを説明せよ。

(2) B $\to$ C の変化で、気体に加えられた熱 Q と気体がした仕事 W を求めよ。

(3) C $\to$ A の変化で、気体に加えられた熱 Q' と気体がした仕事 W' を求めよ。

(4) $T_{\mathrm{A}} = T_{\mathrm{B}}$ および (2)、(3) の結果を用いて、$(c_p - c_V)(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{A}})$ を p_{A}、p_{B}、V_{A}、V_{B} のうち必要なものを用いて表せ。

(5) 前問 (4) で得た関係式から、マイヤーの関係式 $c_p = c_V + R$ を導け。

マイヤーのサイクルにおいて、A $\to$ B の変化は不可逆であるが、B $\to$ C と C $\to$ A の変化は可逆である。以下では、逆向きの準静的な変化 A $\to$ C と C $\to$ B を考える。

(6) A $\to$ C におけるエントロピーの変化 ΔS を求めよ。

(7) C $\to$ B におけるエントロピーの変化 $\Delta S'$ を求めよ。

(8) A $\to$ B におけるエントロピーの変化 $\Delta S''$ を求めよ。