九州大学理学部物理学科（物理学コース）

平成２９年度 第３年次編入試験

物理学

平成２８年７月２日（土）９：００－１２：００

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

(2) 問題冊子は表紙を含めて 10 枚で、問題は [I] から [III] まである。

(3) 解答用紙には、受験番号と氏名を記入すること。

(4) 解答は指定された解答用紙に記入すること。指定された解答用紙であれば、裏面を使って解答しても良い。下書きには問題用紙の余白や裏面などを利用し、解答用紙の余白には下書きをしないこと。

(5) 解答用紙に書ききれない場合や、用紙を取り替えたい場合は、試験監督に申し出ること。

(6) 問題冊子は持ち帰ってよい。

[I] (80 点)

以下の問いに答えよ。ただし導出に必要な物理量があれば各自で定義し、解答に明示しなさい。

惑星の運動に関するケプラーの法則は、以下の 3 点である。

第 1 法則： 惑星の軌道は太陽を片方の焦点とする楕円である。

第 2 法則： 太陽から惑星まで引いた線分の描く面積速度は一定である。

第 3 法則： 惑星の公転周期の 2 乗は楕円軌道の長軸の長さの 3 乗に比例する。

図 1 のように太陽を原点とする 2 次元平面内を運動する惑星を考え、その楕円軌道の長軸方向に x 軸を取る。惑星は質量 m の質点と考え、その位置ベクトルは極座標 r, θ を用いて $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ と表す。ただし、図の $\boldsymbol{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta), \boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ はそれぞれ r 方向、θ 方向の単位ベクトルである。太陽の質量は惑星の質量よりも十分に大きいとする。

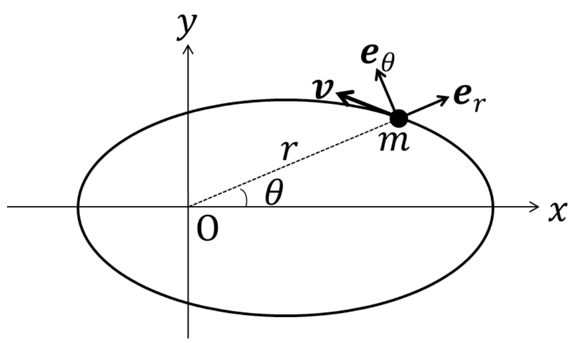

図 1

(1) 第 2 法則は、惑星の角運動量 $\boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が保存することを意味する。ここで、$\boldsymbol{p}$ は運動量である。このことを用いて、惑星が受ける力が $\boldsymbol{r}$ に平行であることを示せ。

(2) 太陽と惑星の間のポテンシャル V は θ に依存しない。これを $V(r) = -Cr^n$ (C, n：定数) と仮定する。惑星が円運動を行う場合を考え、第 3 法則を用いて $n = -1$ であることを示せ。

以下では、ポテンシャルを $V(r) = -C/r$ とする。

(3) 惑星の r, θ 方向の速度成分 $v_r \equiv \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_r,\ v_\theta \equiv \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_\theta$、および角運動量の大きさを、極座標 r, θ、およびそれらの時間微分 $\dot{r}, \dot{\theta}$ を用いて表せ。

(4) 惑星の力学的エネルギー E を極座標を用いて表せ。

(5) 角運動量保存則から $D \equiv |\boldsymbol{l}|$(定数) として、$E$ を θ や $\dot{\theta}$ に依存しない形式で表せ。

(6) 惑星の r 方向の運動は、有効ポテンシャル $W(r) \equiv V(r) + D^2/(2mr^2)$ の下での質量 m の物体の 1 次元運動とみなすことができる。$W(r)$ の概形を図示せよ。ただし、極値を取る座標を定数 C, D, m を用いて明示せよ。

(7) 惑星と太陽の距離 r が有限にとどまる条件を E の範囲で表せ。ただし、解答は定数 C, D, m を用いて表せ。

(8) 惑星が円運動するときの E の値を定数 C, D, m を用いて答えよ。

[II]　(80 点)

以下において空間は真空であるとし、その誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0, μ_0 とする。

[II − 1]　最初に任意の電荷分布を持つ空間を考える。

(1) 位置 $\boldsymbol{r}$ ($r = |\boldsymbol{r}|$) における電界ベクトルを $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ とする。図 2-1 のように、原点を中心とする半径 r の球面を S、S 上の微小面要素を dS、S より内側に含まれる電荷の総和を $Q(r)$ とする。S 上の電界ベクトルが満たす、ガウスの法則の式を書け。

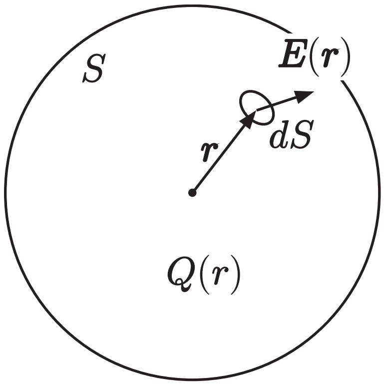

図 2-1

次に電荷分布が原点に対して球対称である場合を考える。対称性から $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の成分のみを持ち、その成分は r の関数となるので、これを $E(r)$ と表す。

(2) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を $E(r)$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ。

具体例として図 2-2 のように、原点を中心とする半径 a、電荷密度 ρ の一様に帯電した球を考える。球の外側には電荷は存在しないものとする。

(3) $E(r)$ を求めよ。ただし、$r > a$ と $0 \leqq r \leqq a$ に場合わけして答えること。

(4) 電位の基準を無限遠 $(r = \infty)$ としたとき、位置 $\boldsymbol{r}$ における電位 $V(r)$ を求めよ。ただし、$r > a$ と $0 \leqq r \leqq a$ に場合わけして答えること。

(5) 電界が蓄えている単位体積あたりのエネルギーは $\dfrac{1}{2}\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2$ で与えられる。この球による電界が、全空間に蓄えているエネルギー U を求めよ。

十分遠方 $(r \gg a)$ にある電荷を、この一様に帯電した球の表面まで運び、同じ電荷密度 ρ で図 2-3 のように表面上に積み上げたところ、球の半径は a から微小量 da だけ増加し、$a + da$ になった。

(6) このときの電荷を運ぶのに要した仕事量 dW を求めよ。

次に、同様な方法で十分遠方から電荷を運び、一様に帯電した球を半径ゼロから a にまで成長させることを考える。

(7) このときの電荷を運ぶのに要した総仕事量 W を求めよ。

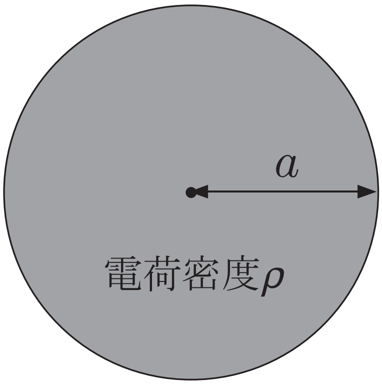

図 2-2

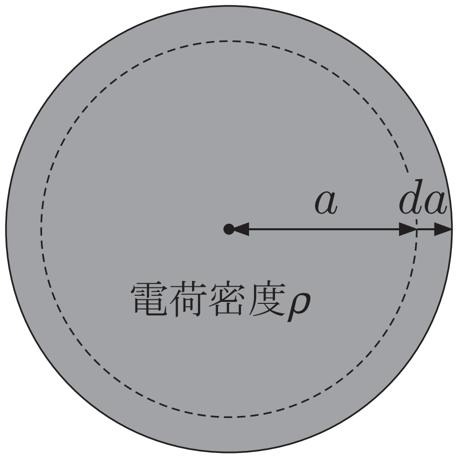

図 2-3

[II − 2]　位置 $\boldsymbol{r}'$ にある微小電流要素 $I\,d\boldsymbol{s}$ が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁束密度 $d\boldsymbol{B}$ はビオ・サバールの法則により

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

と表される。

図 2-4 のように x-y 面上に原点を中心とする半径 a の円電流がある。電流の大きさを I とし、向きは z 軸正方向に進む右ネジが回る向きとする。また、微小線要素 $d\boldsymbol{s}$ の位置を $\boldsymbol{r'} = (x', y', z') = (a\cos\phi,\ a\sin\phi,\ 0)$ とし、$d\boldsymbol{s}$ の長さを $a\,d\phi$ とする。ここで、ϕ は $\boldsymbol{r'}$ と x 軸のなす角度であり、$d\phi$ はその微小変化量である。

(1) $d\boldsymbol{s}$ の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

(2) 微小電流要素 $Id\boldsymbol{s}$ が原点 $\boldsymbol{r} = (0, 0, 0)$ に作る磁束密度 $d\boldsymbol{B}$ の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

(3) 円電流全体が原点に作る磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の x, y, z 成分をそれぞれ求めよ。

次に、この円電流を図 2-5 のように磁束密度 $\boldsymbol{B}_0 = (B_0\sin\theta,\ 0,\ B_0\cos\theta)$ の一様な外部磁場中に置く。

(4) 微小電流要素 $Id\boldsymbol{s}$ が外部磁場から受ける力の z 成分を求めよ。

(5) この微小電流要素が受ける y 軸周りのトルクを求めよ。

(6) 円電流全体が受ける y 軸周りのトルクを求めよ。

(7) この円電流が持つ磁気モーメントは z 軸と平行である。一般に磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を持つ磁気双極子が磁束密度 $\boldsymbol{B}_0$ の外部磁場から受けるトルクは $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}_0$ である。このことから円電流が持つ磁気モーメントの大きさを導き出せ。

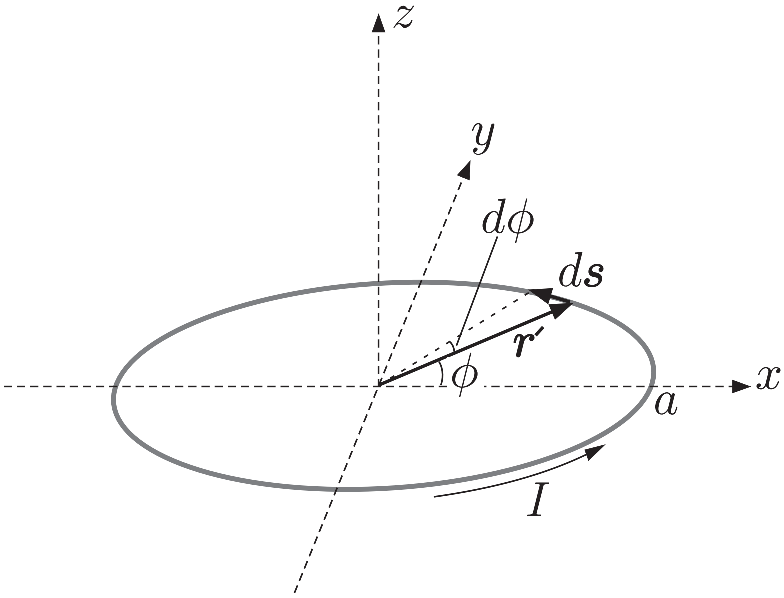

図 2-4

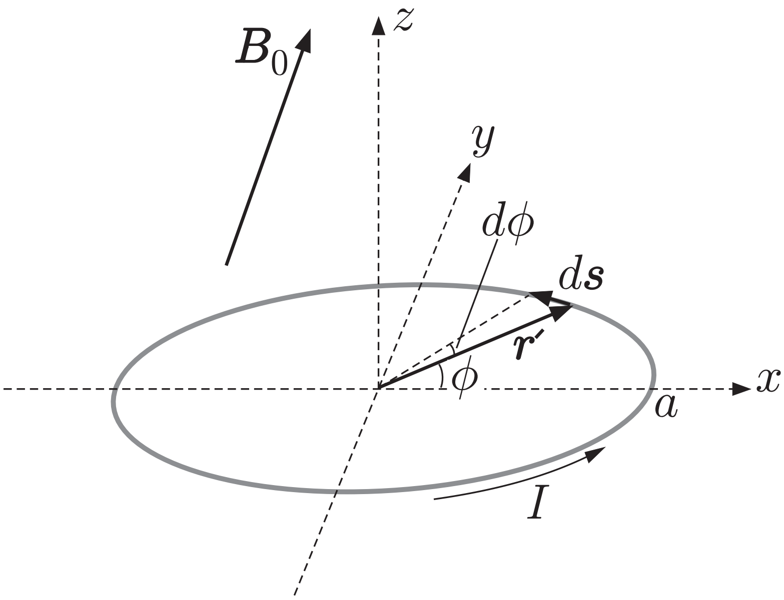

図 2-5

[III]　(80 点)

以下の問いに答えよ。

[III-1] 理想気体の準静的等温変化と準静的断熱変化について、以下の問いに答えよ。表記は

V : 体積	p : 圧力	T : 温度	S : エントロピー
C_V : 定積比熱	C_p : 定圧比熱	R : 気体定数	

を用いる。また、n モルの理想気体に対して

状態方程式	:	$pV = nRT$
マイヤーの関係式	:	$C_p - C_V = nR$

が成り立つこと、および C_V と C_p が定数であることを用いてよい。

(1) 準静的等温変化において、

$$pV = \text{一定}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 準静的断熱変化は

$$C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = 0$$

と表すことができる。熱力学第一法則からこの式を導け。

(3) 準静的断熱変化において、ポアッソンの関係式

$$pV^{\gamma} = \text{一定}$$

が成り立つことを示せ。ただし、$\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ とおく。

(4) 等温圧縮率 $\kappa_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ と断熱圧縮率 $\kappa_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_S$ の間に

$$\kappa_T = \gamma\,\kappa_S$$

という関係があることを示せ。

(5) κ_T と κ_S の大小関係を求めよ。

(6) 等温過程および断熱過程を示す p-V 図を作成せよ。また、前問で求めた κ_T と κ_S の大小関係について、p-V 図を使った説明を述べよ。

[**III-2**] 空気中を伝わる音波について問う。簡略化のため、図 3 のような円筒領域内を軸方向に伝搬する場合に限定する。円筒領域の断面積を A、中心軸を x 軸にとる。空気の平均体積密度は ρ とする。

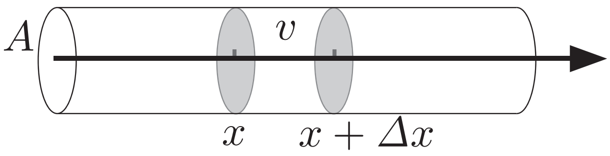

図 3

(1) 音波による空気の変位を $\xi(x)$ で表す。位置 x にある空気は、そこから $\xi(x)$ だけ x 方向に移動する。

円筒内の区間 $[x, x+\Delta x]$ の空気が変位すると、この空気が占める体積は $v = A\Delta x$ から

$$v' = A\left\{\Delta x + \xi(x+\Delta x) - \xi(x)\right\}$$

に変化する。このことを図を描いて説明せよ。

(2) 体積が変化すると、それに伴って圧力も変化する。両者の変化は空気の断熱圧縮率 $\kappa_S = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial p}\right)_S$ で関係付けられる。

位置 x にあった空気の変位後の圧力が

$$p(x) = p_0 - \frac{1}{\kappa_S}\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{a}$$

と書けることを示せ。ここで、p_0 は変位が無いときの圧力を表し、位置 x に依らず一定値をとる。

ヒント：

前問の結果から、微小領域での体積変化率は

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v' - v}{v} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

と書ける。

(3) 微小領域の空気に働く力は、左右両側の境界断面にかかる圧力である。空気の運動方程式

$$\rho\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{b}$$

を導け。

(4) 式 (b) に式 (a) を代入して得られる波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \kappa_S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{c}$$

を満たす解は、２階微分可能な任意の関数 f を用いて

$$\xi(x, t) = f(x \pm ct) \tag{d}$$

の形になることが知られている。ここで $c = \sqrt{\dfrac{1}{\rho \kappa_S}}$ は音速である。式 (d) が式 (c) を満たすことを確かめよ。