九州大学理学部物理学科（物理学コース）
令和２年度 第３年次編入試験
物理学

令和元年７月６日（土）　９：００–１２：００

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。
(2) 問題冊子は表紙を含めて１０ページで、問題は [I] から [III] まである。
(3) 全ての解答用紙に、受験番号と氏名を記入すること。
(4) 解答は指定された解答用紙に記入すること。特に指定のない場合には、裏面を使って解答してもよい。下書きには、問題冊子の余白や裏面などを利用し、解答用紙の余白には下書きをしないこと。
(5) 解答用紙に書ききれない場合や、用紙を取り替えたい場合は、試験監督に申し出ること。
(6) 問題冊子は持ち帰ってよい。

[I] （80 点）

[I-1]　質量 m、長さ ℓ、太さの無視できる一様な伸縮しないひもを考える。

[I-1a]　図 1 に示すように、ひもの長さ $a(<\ell)$ の部分がテーブルの端から下がった状態で静止している。ここでテーブルの端から下がった部分に作用する重力が、テーブル上の部分に働く水平方向の張力に変換されるものとする。ひもとテーブルの静止摩擦係数を μ_0、重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

(1) ひもがテーブルから受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

(2) 手を離してもひもがテーブルから落ちない最大の a の値を求めよ。

[I-1b]　テーブルから垂れ下がったひもの長さを前問 (2) よりも大きな値 b にしたところ、時刻 $t=0$ でひもが静かに動き出した。ひもとテーブルの動摩擦係数を μ_1、運動の途中でひもはたるまないものとして、以下の問いに答えよ。

(3) 図 2 のようにテーブルの角を原点 O、垂直方向の下向きを y の正、テーブル面の左向きを x の正とする。このとき、ある時刻 t におけるテーブル上のひもの端の位置 P が $x(t)$、テーブルから垂れ下がったひもの端の位置 Q が $y(t)$ で与えられるとする。ひもに働く張力の大きさを T として、$x(t)$ と $y(t)$ に対する運動方程式をそれぞれ求めよ。

(4) ひもの長さ ℓ と $x(t)$、$y(t)$ の関係から、$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ と $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$ の関係を求めよ。

(5) 前問 (3) と (4) から $y(t)$ に関する微分方程式を求めよ。

(6) 初期条件を考慮して、前問 (5) の微分方程式を解き $y(t)$ を求めよ。

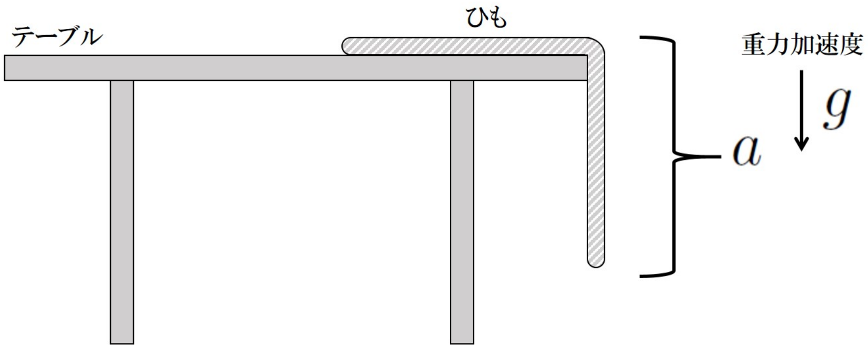

図 1

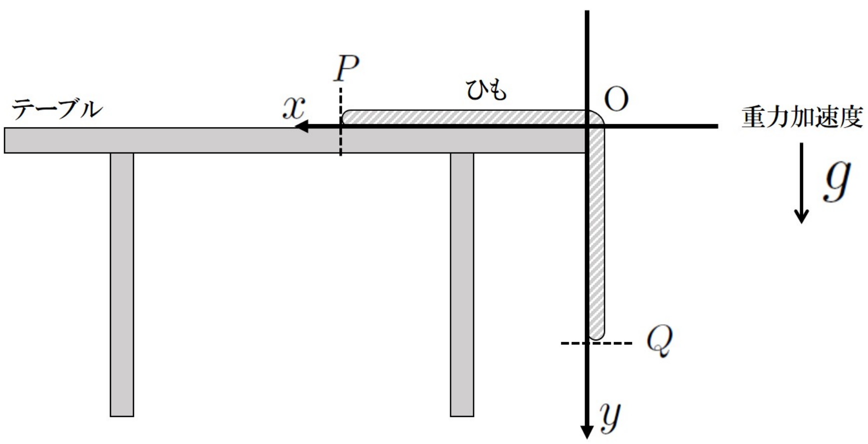

図 2

[I-2]　2 次元の力の場 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ のもとで、x-y 平面内を運動する質量 m の質点を考える。力の場 $\boldsymbol{F}$ が

$$F_x = \frac{\alpha}{r^2}\frac{x}{r}$$
$$F_y = \frac{\alpha}{r^2}\frac{y}{r}$$

で与えられる。ただし、α は定数、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。

[I-2a]　デカルト座標表示 (x, y) を用いて、以下の問いに答えよ。

(1) 上で与えられた力の場 $\boldsymbol{F}$ は保存力である。保存力の定義を説明せよ。

(2) 図 3 のように z 軸を紙面に垂直に手前向きに取る。質点の原点 O に対する角運動量の z 成分 L_z を、その位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y)$ の成分を用いて表せ。

(3) 前問 (2) で求めた角運動量が保存することを証明せよ。

[I-2b]　デカルト座標系 (x, y) から極座標系 (r, θ) への変換を考える。2 つの座標系の間の関係は

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

で与えられる。極座標表示 (r, θ) を用いて、以下の問いに答えよ。

(4) 力の場 $\boldsymbol{F}$ の r 方向の成分 F_r を求めよ。

(5) 力の場 $\boldsymbol{F}$ の θ 方向の成分 F_θ が 0 になることを示せ。

(6) 前問 (4) の結果から、力の場 $\boldsymbol{F}$ によるポテンシャル $U(r)$ を求めよ。ただし、$r = \infty$ をポテンシャルの基準とする。

(7) 初期条件としてデカルト座標系における $(x, y) = (-\infty, b)$ から質点を x 軸に平行に初速 v_0 で x 軸の正方向へ入射する。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ におけるエネルギー保存の式を示せ。

(8) 角運動量保存の式を用いて前問 (7) の式を θ を含まない形に変形せよ。

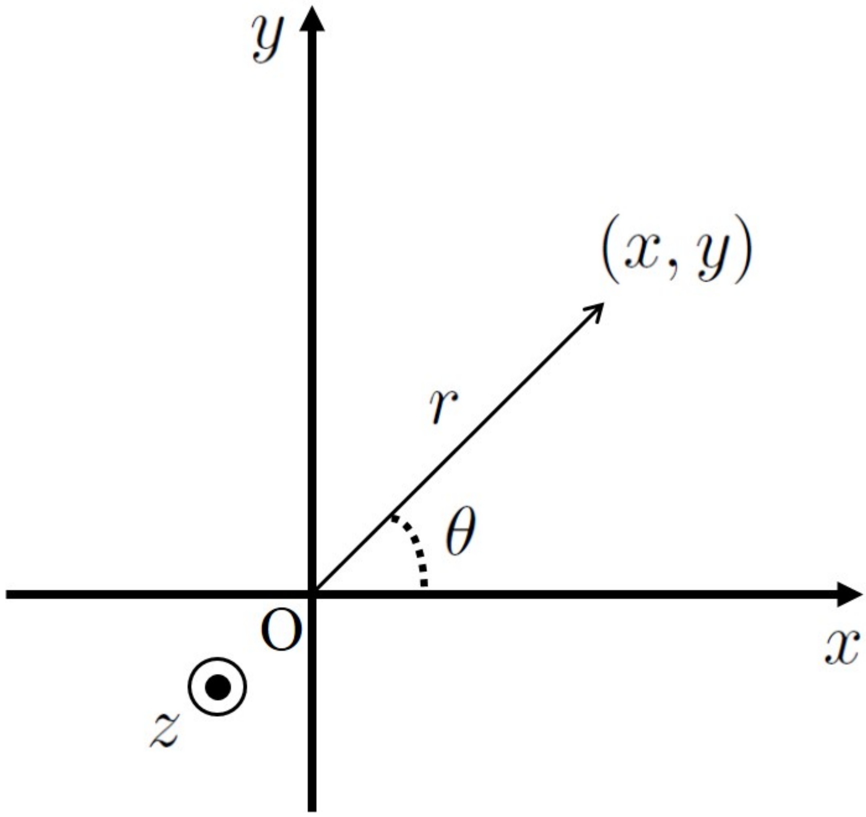

図 3

[II] （80 点）

[II-1]　真空中の静電場 $\boldsymbol{E}$ 中に置かれた電気双極子 $\boldsymbol{p}$ に関する以下の問いに答えよ。

(1) 電場の定義を答えよ。

(2) 静電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は力学的仕事を用いて定義される。この定義の内容を説明せよ。

(3) 前問 (1)、(2) の電場と静電位の定義を基に、$\boldsymbol{E}$ を $\phi(\boldsymbol{r})$ を用いて表わせ。

(4) 静電場 $\boldsymbol{E}$ 中で、位置 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}$ に点電荷 q、位置 $\boldsymbol{r}$ に点電荷 $-q$ がある場合の静電エネルギーを静電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を用いて表わせ。

(5) 前問 (4) において、$|\boldsymbol{d}|$ が $|\boldsymbol{r}|$ に比べて微小とするとき、静電位を $|\boldsymbol{d}|$ の 1 次までテイラー展開し、静電エネルギーを電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$ を用いて表わせ。

(6) この電気双極子に働く力を $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{p}$ を用いて表わせ。

以下では、電場 $\boldsymbol{E}$ が均一なとき、電気双極子 $\boldsymbol{p}$ が受ける力を考察する。なお、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{p}$ のなす角度を θ とする。

(7) 電気双極子の重心が受ける力を求めよ。

(8) 電気双極子に働く重心の周りの力のモーメントを $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{p}$ を用いて表せ。

(9) このモーメントで、電気双極子はどの方向に向くか。その理由も述べよ。

[II-2]　真空中の電磁場に関する以下の問いに答えよ。

指定がない限り、偏微分方程式、積分の式のいずれで答えてもよい。

[II-2a]　電磁場が時間変動しない場合には、以下の方程式 (a)–(c) が成立する。

$$\text{(a)}\quad \varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho \quad \text{または} \quad \varepsilon_0\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int \rho dV$$

$$\text{(b)}\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad \text{または} \quad \int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

$$\text{(c)}\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \quad \text{または} \quad \oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\int \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで、$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、ρ は電荷密度、$\boldsymbol{j}$ は電流密度、ε_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率、$\int d\boldsymbol{S}$ は表面積分、$\int dV$ は体積積分、$\oint d\boldsymbol{l}$ は周回積分である。また、微分演算子の定義は以下のようになる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\partial E_x/\partial x+\partial E_y/\partial y+\partial E_z/\partial z$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=(\partial E_z/\partial y-\partial E_y/\partial z, \partial E_x/\partial z-\partial E_z/\partial x, \partial E_y/\partial x-\partial E_x/\partial y)$$

解答には、ベクトル関数 $\boldsymbol{G}$ に関する関係式 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{G}=0$、$\oint \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{l}=\int \nabla\times\boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{S}$ を用いてもよい。

(1) 上記の方程式 (a)–(c) のそれぞれの物理的意味を述べよ。

(2) 方程式 (c) を用いて、電流の保存則を表わす偏微分方程式を導け。

[II-2b]　以下では、電磁場が時間変動する場合を考える。

(3) 方程式 (a)–(c) に加え、時間変動する磁場に関する法則は、発電機等の原理としても重要である。この法則の名前を答え、法則の内容を簡単に説明せよ。

(4) 電磁場が時間変動する場合、電荷密度も時間変化する ($\partial\rho/\partial t\neq 0$)。この時、前問 (2) の電流の保存則の拡張である「電荷の保存則」が成立する。領域内の電荷の保存を基に、電荷の保存則を表わす式を求めよ。なお、導出過程も説明せよ。

(5) 電磁場が時間変動する場合に、以下の順番で方程式 (c) がどうなるか考えてみよう。

[A] 前問 (4) で得られた式を、電場 $\boldsymbol{E}$ を用いて書きなおせ。

[B] 方程式 (c) を電磁場が時間変動する場合 ($\partial\rho/\partial t\neq 0$) に拡張した式を導け。

ヒント：前問 (2) での導出過程を逆にたどってみよ。

[III] （80 点）

[III-1] 一様な線密度 σ の長さ ℓ の弦が、一様な張力 T で引っ張られて振動する場合を考える。図 4 のように x の位置の点 P での弦の変位を $y(x,t)$ とする。また、x から Δx だけずれた点を Q とする。また、x 方向の運動は考えないものとする。

(1) 弦の微小部分 PQ に対する弦と垂直方向の運動方程式を求めよ。

(2) θ と θ' が微小である時、

$$\sin\theta \simeq \tan\theta = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

$$\sin\theta' \simeq \tan\theta' = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

を使って、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

となることを示せ。また、c を求めよ。

ここで、

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

は位置 x での微分係数である。

(3) 前問 (2) で得られた方程式の解を次のように仮定する。

$$y_m(x,t) = a_m(t)\sin\left(\frac{\pi m x}{\ell}\right) \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

ここで、初期条件は次の式で表される。

$$y_m(x,0) = \sin\left(\frac{\pi m x}{\ell}\right), \quad \frac{\partial y_m(x,0)}{\partial x} = 0$$

このとき、初期条件を満たす $a_m(t)$ を求めよ。

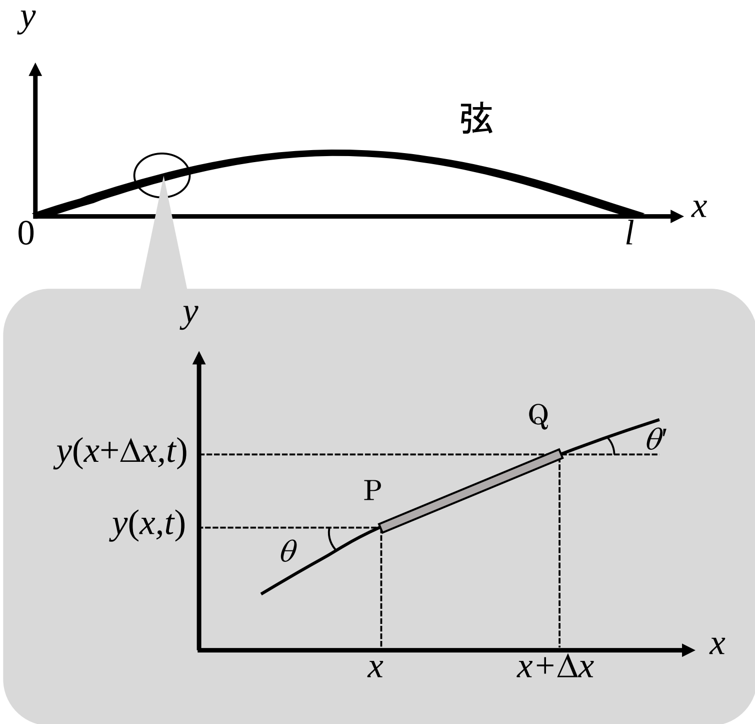

図 4

[III-2]　内部エネルギーを E、体積を V、温度を T、熱量を Q とする。E が T と V の関数で表されるとき、以下の問いに答えよ。

(1) 状態の微小変化に対する熱力学第一法則を書け。

(2) E の独立変数として T と V を選ぶとすると $E = E(T, V)$ と書ける。この時、E の微小変化 dE を dT と dV で表せ。また、この式と前問 (1) から Q の微小変化 dQ' を求めよ。

(3) 次式を示せ。

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V, \quad C_p = C_V + \left\{\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right\}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

ここで、C_V は定積比熱、C_p は定圧比熱である。

(4) 一般に、定圧比熱は定積比熱より大きい。その物理的な理由を述べよ。

(5) N モルの理想気体を考える。関係式 $C_p - C_V = NR$ を導け。ここで、R は気体定数である。

(6) 前問 (3) において、一般の変化に対する比熱 C は

$$C = C_V + \frac{C_p - C_V}{\beta V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{\text{過程}} \qquad \left(\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p : \text{体積膨張率}\right)$$

で表されることを示せ。ただし、$(\partial V/\partial T)_{\text{過程}}$ は、いま考えている変化における $\partial V/\partial T$ の値を表すものとする。

問題訂正

[III-I](3)

$$\frac{\partial y_m(x,0)}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial y_m(x,0)}{\partial t} = 0$$