九州大学理学部物理学科（物理学コース）

令和４年度 第３年次編入試験

物理学

令和３年９月１１日（土）　９：００-１２：００

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと.

(2) 問題冊子は表紙を含めて１１ページで, 問題は [I] から [IV] まである.

(3) 全ての解答用紙に, 受験番号と氏名を記入すること.

(4) 解答は指定された解答用紙に記入すること. 特に指定のない場合には, 裏面を使って解答してもよい. 下書きには, 問題冊子の余白や裏面などを利用し, 解答用紙の余白には下書きをしないこと.

(5) 解答用紙に書ききれない場合や, 用紙を取り替えたい場合は, 試験監督に申し出ること.

(6) 問題冊子は持ち帰ってよい.

[I]　(80 点)

[I-A] 半径 a の円板の中心から半径 h $(< a)$ の円板をくりぬいたドーナツ状の板について考える。(以下ではこの物体を単に板と呼ぶ。図 I-1。) この板は剛体とみなせるとし，その質量を M，面密度（単位面積当たりの質量）は一様とする。内側の円周上の点 O で，太さの無視できる水平軸 A に板を吊り下げる。板は常に軸 A に対して垂直を保ちながら点 O の周りで回転し，軸との接触点において滑りを生じないものとする。点 O を通る直径が鉛直下方となす角度を θ とし，図 I-1 の矢印の向きを θ の正とする。また，重力加速度の大きさは g とする。

特に指定がない場合には，解答は M，a，g，h，θ のうち必要なものを用いて表すこと。

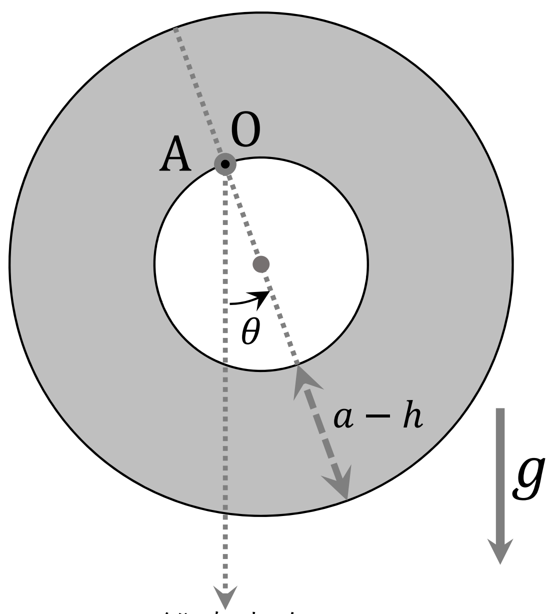

図 I-1

(1) 板の面密度を求めよ。

(2) 軸 A 周りの板の慣性モーメント I を求めよ。

(3) 板の軸 A 周りの回転の運動方程式を I を用いて書け。ただし時刻は t とせよ。

(4) 軸 A 周りで，板を平衡点からずらして微小振動させる。$|\theta| \ll 1$ として，この時の振動の周期 T を I を用いて書け。

(5) (4) で求めた T に (2) で求めた I を代入して，T を最小にする h とその時の T を求めよ。

[I-B] 伸び縮みのしない質量の無視できる糸 (長さ r_0) の一端を図 I-2(a) のように支点 O に固定し，他端に質量 m の質点 P をとりつけた球面振り子の運動を考える。図 I-2(a) のように，支点 O を原点とするようにデカルト座標系を設定する。この球面振り子の中心は，支点 O である。3 次元極座標表示において，糸が鉛直下方となす角度を θ，糸の水平面への射影の方位角を ϕ とする。極座標系の単位ベクトルを図 I-2(b) のように $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ とする。図 I-2(b) 上図は点 P を含む水平面を表し，図 I-2(b) 下図は点 P を含む鉛直面を示している。重力加速度の大きさを g とし，向きを $+z$ 方向とする。以下の問いでは，糸がたるまない状況を考える。

極座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトルについて，以下の関係式を用いてよい。

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \quad (r : \text{原点からの距離})$$

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|} = \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|} = \boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_r, \quad \boldsymbol{e}_\phi = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|} = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta$$

特に指定がない場合には，解答は m，g，r_0，θ，$\dot{\theta}(= d\theta/dt)$，$\ddot{\theta}(= d^2\theta/dt^2)$，$\phi$，$\dot{\phi}(= d\phi/dt)$，$\ddot{\phi}(= d^2\phi/dt^2)$，$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ のうち必要なものを用いて表すこと（ただし t は時刻を表す)。

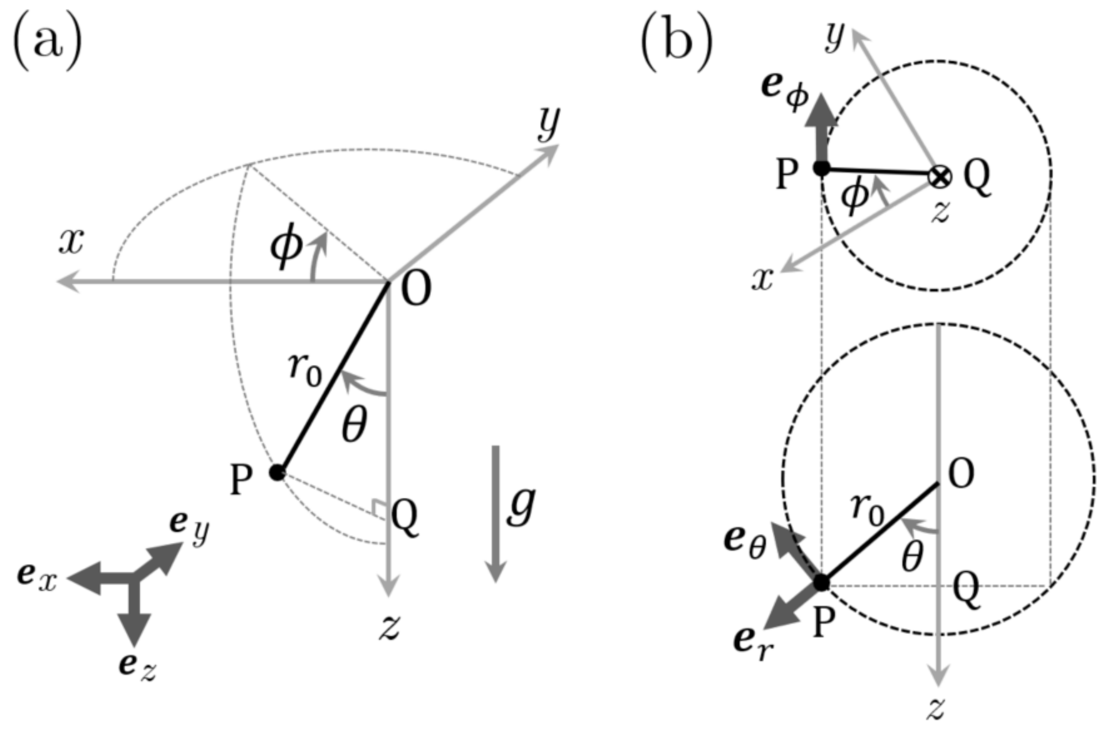

図 I-2

(1) 3 次元デカルト座標系における質点 P の位置 $(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}})$ を r_0，θ，ϕ を用いて表せ。

(2) 3 次元極座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ それぞれを，デカルト座標系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて $x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ の形で表せ。

(3) 単位ベクトルの時間微分 $d\boldsymbol{e}_r/dt$，$d\boldsymbol{e}_\theta/dt$，$d\boldsymbol{e}_\phi/dt$ は，$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を用いて以下の形で書けることを示せ。

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{e}_r/dt &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\
d\boldsymbol{e}_\theta/dt &= -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi \\
d\boldsymbol{e}_\phi/dt &= -\dot{\phi}(\sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta)
\end{aligned}
$$

(4) 質点 P の速度ベクトル $d\boldsymbol{r}/dt$ を, $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を用いて表せ。

(5) 質点 P の加速度ベクトル $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ を, $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を用いて表せ。

(6) 糸の張力の大きさ S を用いて，質点 P に働く外力 $\boldsymbol{F}$ を, $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を用いて表せ。

(7) 質点 P の θ 方向についての運動方程式を記せ。また，その方程式に基づき，質点 P がある 1 つの水平面内を円運動するための $\dot{\phi}$ に関する条件を求めよ。ただし，$0 < \theta < \pi/2$ とする。

(8) 点 P を通る水平面が z 軸と交わる点を Q とする。線分 PQ の xy 平面への射影が単位時間あたりに描く面積（面積速度）H を求めよ。ただし，質点 P は水平面内を運動しているとは限らないものとする。

(9) (8) の問いで求めた H が一定となることを示せ。

[II]　(80 点)

[II-A] 半径 a の球内に一様な電荷密度 ρ で正電荷が分布しているとする。この球は，中心が同じで内側の半径が b $(> a)$，外側の半径が c $(> b > a)$ の導体球殻によって囲まれている（図 II-1)。これらは真空中にあるとして，以下の問いに答えよ。ただし，半径 a の球内および真空中の誘電率を ε_0 とし，導体球殻は接地されているとする。

(1) 導体球殻の内側表面と外側表面の単位面積当たりの電荷を求めよ。

(2) 球の中心からの距離を r として，球の内部，及び球殻の内外にできる電場ベクトルの大きさをガウスの法則を用いて求め，r の関数としてグラフにより図示せよ。ただし，グラフは $r > c$ の領域まで含めること。また，電場ベクトルの大きさを導出する際，電場ベクトルの方向について説明し，どのようにガウスの法則を用いたか述べること。

(3) 静電ポテンシャル（電位）を r の関数として求め，グラフにより図示せよ。ただし，グラフは $r > c$ の領域まで含めること。

(4) $0 \leq r \leq b$ の領域に蓄えられる静電エネルギーを，静電エネルギー密度の空間積分により求めよ。

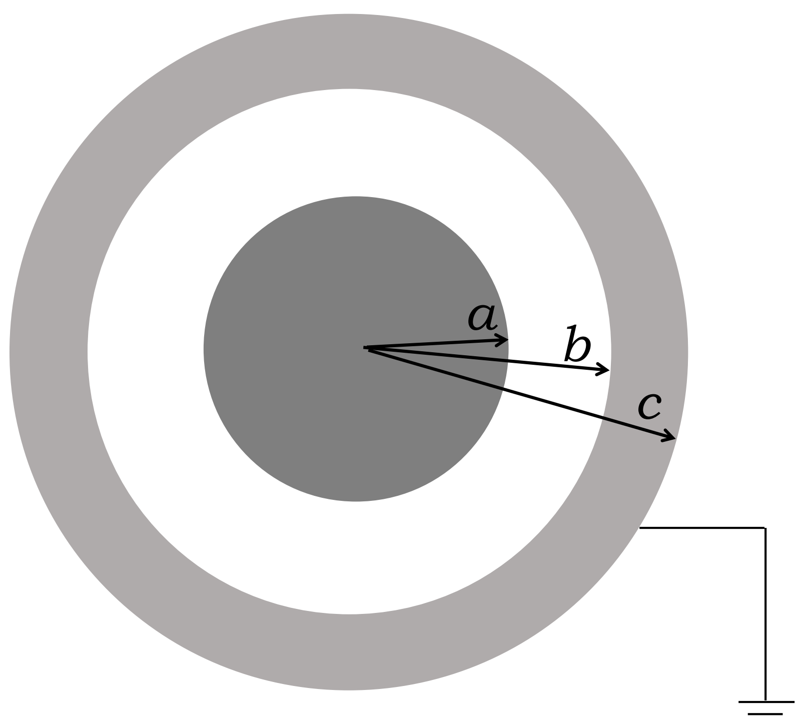

図 II-1

[II-B] 図 II-2 のような二つのコンデンサー，抵抗，コイル，二つのスイッチからなる回路を考える。初めスイッチ S_1，S_2 は開いており，左側の容量 C_1 のコンデンサー ① には電荷 Q_0（上の極板に正の電荷 Q_0，下の極板に負の電荷 $-Q_0$）が蓄えられている。また，右側の容量 C_2 のコンデンサー ② に電荷はない。コイルのインダクタンスを L，抵抗を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 $t=0$ に S_1 を閉じた後，時刻 t にコンデンサー ① に蓄えられている電荷を $Q_1(t)$ とする。$Q_1(t)$ に対する微分方程式を書き下し，解を求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ から十分時間が経つ間に抵抗で消費されるエネルギーを，ジュール熱の時間積分によって求めよ。また，時刻 $t=0$ と十分時間が経った後のコンデンサーに蓄えられているエネルギーをそれぞれ求め，抵抗で消費されるエネルギーとの関係について述べよ。

(3) 上の状態から十分時間が経った後，S_1 を開き，次に S_2 を閉じると，電気振動により振動電流が現れた。S_2 を閉じた時刻を改めて $t=0$ として，コンデンサー ① に蓄えられている電荷は，$Q_1(t) = \alpha\cos(\omega t+\beta)$ の形にかけることがわかっている。ここで α，β，ω は定数である。$Q_1(t)$ に対する微分方程式を書き下し，初期条件について述べた上で解を求め，α，β，ω を C_1，C_2，Q_0，L，R の中から必要なものを用いて表せ。

以下の問いでは，下のアンペール-マクスウェルの方程式をもとに解答せよ。

$$-\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$ は電場ベクトル，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度ベクトル，$\boldsymbol{j}$ は電流密度ベクトル、ε_0 と μ_0 は真空の誘電率と透磁率である。

(4) コンデンサー ① は図 II-3 のように，半径 a の薄い導体円盤を距離 d だけ離して設置した平行平板コンデンサーであった。ただし，$d \ll a$ とし，導体円盤は真空中に置かれているものとする。(3) の問いの設定で，時刻 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ において，導体円盤間の変位電流密度の大きさを求めよ。解答は，α，β，ω，d，C_1，a，ε_0，μ_0 の中から必要なものを用いて記すこと。ただし，電場は導体円盤間のみに発生し，その外側への影響は無視できるものとする。

(5) 時刻 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ に変位電流が作る磁束密度の大きさを，二つの導体円盤の中心を結ぶ軸からの距離 r の関数として求め，グラフにより図示せよ。解答は，α，β，ω，d，C_1，a，r，ε_0，μ_0 の中から必要なものを用いて， $0<r<a$ と $a \le r$ のそれぞれの場合に分けて求めよ。求め方についても述べること。また，グラフには磁束密度の大きさの最大値を記すこと。ただし，磁束密度は二つの導体円盤の中心を結ぶ軸の周りに同心円状に生じる（すなわち磁束密度の方向は，上述の軸上の点を中心とし，導体円盤に平行な円の接線方向である）ことは，証明なしに用いてよい。

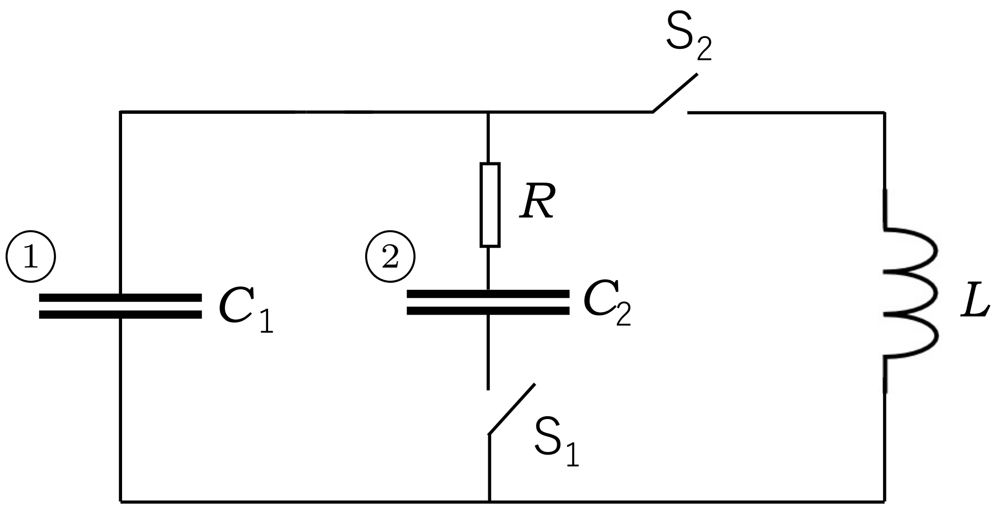

図 II-2

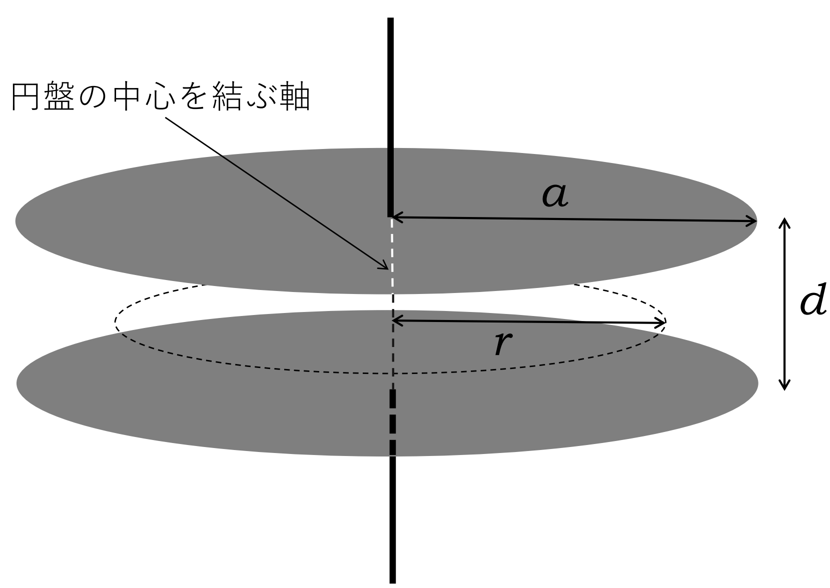

図 II-3

[III]　(40 点)

速度に比例する抵抗力を受ける一次元振動子が，角振動数 $\omega\,(>0)$ の振動的な外力の影響を受ける場合を考える。このとき運動方程式は $\gamma > 0,\ \omega_0 > 0$ として，

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos\omega t \quad \cdots (*)$$

と書くことができる。この微分方程式の解は,

$$x(t) = [\text{(a) 外力ゼロの場合の } (*) \text{ の一般解}] + [\text{(b) } (*) \text{ の特解}]$$

で表される。十分に時間が経つと，(a) はゼロに収束するため，運動は (b) で決まる。

また，$(*)$ の特解を見つけるためには，$x(t)$ が実部となる複素数 $z(t)$ を考え，以下の微分方程式

$$\ddot{z}(t) + 2\gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0 \exp(i\omega t) \quad \cdots (**)$$

の特解を求め，その実部を取れば良い。ここで，i は虚数単位を示す。以下の問いに答えよ。

(1) $(**)$ の特解を $z_{\mathrm{p}}(t) = C\exp(i\omega t)$ とおく。このときの C を求めよ。

(2) (1) で求めた C を用いて，$z_{\mathrm{p}}(t)$ の実部 $x_{\mathrm{p}}(t)$ を計算すると,

$$x_{\mathrm{p}}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

と表せる。A および B を求めよ。

(3) 振動子の運動が $x_{\mathrm{p}}(t)$ と表せるとき，時刻 $t \sim t + \Delta t$ の微小時間に，振動的な外力がする微小仕事 ΔW を書け。ここで，振動的な外力は振動子の質点の質量を m として $mf_0\cos\omega t$ と表せる。また，解答には $m,\ f_0,\ \omega,\ t,\ x_{\mathrm{p}}(t),\ \dot{x}_{\mathrm{p}}(t),\ \Delta t$ のうち必要なものを用いよ。

(4) (3) の結果を用いて，振動的な外力がする 1 周期あたりの仕事 $W_1(\omega)$ を求めよ。解答には m, $f_0,\ \omega,\ A,\ B$ のうち必要なものを用いよ。

(5) (2) の式は

$$x_{\mathrm{p}}(t) = D\cos(\omega t - \phi)$$

と変形できる (ただし $D > 0,\ 0 \le \phi \le \pi$)。$D$ および $\tan\phi$ を，$A,\ B$ を用いて表せ。さらに $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ となる ω を求めよ。

(6) ω を変化させたとき，D の変化を表すグラフの概形を描け。ただし，$\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$ とする。この際，$\omega \to 0$ のときの D の収束値，$\omega \to \infty$ における D の振る舞い，D の極値及びそのときの ω の値をグラフ中に示すこと。

[IV]　(40 点)

以下の (1)〜(4) では気体の断熱過程について考える。過程は全て準静的であるとして問いに答えよ。

(1) 気体に与えた微小な熱量 δQ，その際の内部エネルギー変化量 dU，体積変化量 dV，気体の圧力 p を用いて，この気体に対する熱力学第一法則を式で示せ。ただし，気体分子の数は変化しないものとする。

(2) (1) の関係を出発点として，1 モルの理想気体の断熱過程で圧力 p と体積 V の間に成り立つ関係

$$pV^{\gamma} = \text{一定} \quad \cdots (*)$$

を導出せよ。その際，$dU = C_V dT$，$C_p - C_V = R$，$pV = RT$ が成り立つことを利用してよい。ここで，T は温度，C_V は定積モル比熱，C_p は定圧モル比熱，R は気体定数，$\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ である。

(3) 1 モルの理想気体が断熱変化した際の始状態 A と終状態 B をそれぞれ $(T_{\mathrm{A}}, V_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{A}})$，$(T_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{B}})$ とし，$(*)$ の一定値を k とおく。A → B の過程でこの気体が外部からなされた仕事 W_{AB} を $k, \gamma, V_{\mathrm{A}}, V_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ。

(4) (3) の結果と $(*)$ を用いて式変形して，W_{AB} がこの過程における内部エネルギーの変化量に等しいことを示せ。

以下の (5)(6) では，不可逆過程を含む熱サイクルにおいて $\displaystyle\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$ (クラウジウスの不等式) が成り立つことを利用して問いに答えよ。ここで，δQ は気体が得る微小熱量とする。

(5) 図 IV-1 に示すように状態 D から不可逆過程 I を経て状態 E に達し，E から可逆過程 II を経て D に戻るサイクルを考える。このサイクル 1 周についてクラウジウスの不等式を書くと

$$\int_{\mathrm{I(D \to E)}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\mathrm{II(E \to D)}} \frac{\delta Q}{T} < 0$$

となる。D 及び E におけるエントロピー S_{D} 及び S_{E} を用いて，この不等式の左辺第 1 項または第 2 項を書き換えよ。

(6) 過程 I が断熱不可逆過程であるとして，S_{D}, S_{E} の大小関係を導け。

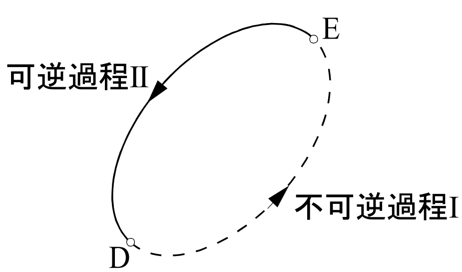

図 IV-1

九州大学理学部物理学科（物理学コース）

令和４年度 第３年次編入試験

英語

令和３年９月１１日（土）　１２：１５-１３：００

注意事項

(1) 辞書は使用できない。

(2) 試験開始の合図があるまでこの冊子を開かないこと。

(3) 問題冊子は表紙を含めて３ページである。

(4) 解答用紙には、受験番号と氏名を記入すること。

(5) 解答は指定された解答用紙に記入すること。特に指定のない場合には、裏面を使って解答してもよい。下書きには、問題冊子の余白や裏面などを利用し、解答用紙の余白には下書きをしないこと。

(6) 解答用紙に書ききれない場合や、用紙を取り替えたい場合は、試験監督に申し出ること。

(7) 問題冊子は持ち帰ってよい。

[問題] (60 点)

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

(出典: "Plot to redefine the kilogram nears climax," Science **356**, 670 (2017))

metrologist: 度量衡研究者，slug: 小さな金属塊，alloy: 合金，vault: 貴重品保管室
CGPM: フランス語の Conférence générale des poids et mesures の略.
immutable: 不変の，fray: （激しい）活動
Josephson junction: ジョセフソン結合（薄い絶縁体などを 2 つの超伝導体ではさんだもの。量子力学的効果により，絶縁体などの中を超伝導電流が流れる。）
scale: はかり，payoff: 見返り

(1) "*Le Grand K*" とは，一言で言えば何のことか。
(2) 下線部 (a) を英訳せよ。
(3) "Kibble balance" とは，どのようなものから構成されていて，何を測れば何がわかる装置であると本文には書かれているか？ 解答に必要であれば，"measuring mode" と "moving mode" は英語のまま記してもかまわない。
(4) 下線部 (b) の意味を記せ（"It" は「それ」としてかまわない）。
(5) 最後の段落において，キログラムの再定義についてどのような良い点と悪い点があると書かれているか。